Jin Akiyama và Mari-Jo Ruiz
Bản dịch của **Vương Hoa** với sự giúp đỡ của **GS. Nguyễn Tiến Dũng**

Một ngày phiêu lưu
TRONG THẾ GIỚI TOÁN HỌC KỲ DIỆU

Tủ sách Sputnik, số 013



Sputnik Education



NHÀ XUẤT BẢN THẾ GIỚI

Chào mừng Fanpage Toán Khó đạt mốc 1000 Like!

Đây là món quà tặng **Toán Khó** gửi tới:



Bạn **Nguyễn Thị Thu Sương**

Trường Đại học Phú Yên,

vì *sự yêu mến, nhiệt tình của bạn đã tham gia mini-game của chúng tôi.*



Page **Ồ Toán học**

http://fb.com/otoanhoc2911/

vì *những nhiệt huyết trong việc sưu tầm và truyền bá* ***Vẻ đẹp Toán học****.*



Bạn **Võ Minh Nhật**

Trường THPT Chuyên Trần Đại Nghĩa, TP. Hồ Chí Minh,

vì *đã là người may mắn thứ 1000 like Page của chúng tôi.*

[toankho.com]: Sharing nice and hard problems.

Get more books at http://book.toankho.com

Về các tác giả

AKIYAMA JIN



Hội viên Viện Khoa học Châu Âu, Trưởng phòng Phòng nghiên cứu phát triển giáo dục, Đại học Tokai, Nhật Bản (Tổ chức phi lợi nhuận), Chánh văn phòng Phòng mô hình thực nghiệm khoa học giáo dục.

Từ năm 1991 đến nay, ông được biết đến rộng rãi như là một giảng viên của khóa học TV trên chương trình truyền hình NHK. Ông đã sản xuất chuỗi khóa học TV trong 10 năm, về các mô hình mẫu và giáo trình giảng dạy, ngày càng hoàn thiện, phát triển chúng, và ra mắt *Thế giới Toán học Kỳ diệu*. Tác giả nghiên cứu đa lĩnh vực như hình học rời rạc, lý thuyết nhóm, hình học không gian,...

MARI-JO RUIZ



Giáo sư khoa Toán, trường Đại học Aneteo de Manila, Philipin, Cựu chủ tịch Hội Toán học Đông Nam Á. Nghiên cứu về lý thuyết nhóm, nhiều lần được trao tặng danh hiệu giáo viên ưu tú nhất Philipin.

Năm 2004, bắt đầu là Hội nghị quốc tế giáo dục Toán học lần thứ 10, được tổ chức ở Đan Mạch, ICME 10, hai tác giả đã đi vòng khắp các thành phố trên thế giới, với tư cách là thành viên Ban tổ chức của "Experiencing Mathematics" trong chương trình triển lãm du lịch do Unesco tài trợ. Ngoài ra, hai tác giả đã cùng tham gia biên tập tạp chí chuyên ngành quốc tế "*Graphs and Combinatorics*" (Springer). Giáo sư Akiyama là trưởng ban biên tập, còn giáo sư Ruiz là một thành viên trong ban biên tập.

MỤC LỤC

Lời giới thiệu

Vào năm 2003, giáo sư Jin Akiyama, tác giả chính của cuốn sách này, đã thành lập trung tâm "Thế giới Toán học Kỳ diệu" ở Hokkaido, Nhật Bản, gồm rất nhiều thiết bị thực nghiệm và mô hình toán học và ứng dụng. Đó là một viện bảo tàng khoa học chuyên về toán học, được giáo sư Jin Akiyama cùng với giáo sư Mari-Jo Ruiz và các cộng sự khác xây dựng với mục đích làm cho mọi người cảm nhận được sự kỳ diệu của toán học. Nhiều vật phẩm ở đây nhận được sự hỗ trợ từ UNESCO, cũng như được đem trưng bày khắp nơi trên thế giới, và chúng đã gây được tiếng vang lớn.

Cuốn truyện hư cấu này kể về một ngày khám phá Thế giới Toán học Kỳ diệu của ba cậu bé. Dưới sự chỉ dẫn của các hướng dẫn viên, ba cậu bé đã tham gia nhiều hoạt động khác nhau, làm thí nghiệm với các mô hình trưng bày trong Thế giới Kỳ diệu, được nhìn thấy cụ thể các phép toán tự nhiên và những ứng dụng thực tế. Chúng trở nên yêu thích môn toán hơn nhiều sau khi rời khỏi nơi này.

Cuốn sách chứa đựng nhiều kết quả rất bất ngờ và thú vị trong toán học, không chỉ đối với các học sinh nhỏ tuổi, mà ngay cả đối với các nhà toán học chuyên nghiệp. Một số kết quả này, ví dụ như định lý lát gạch từ hình tứ diện, đã được giáo sư Akiyama công bố trên tạp chí chuyên ngành. Các kiến thức toán học được truyền tải trong sách một cách đơn giản, độc đáo và tự nhiên. Cuốn sách thích hợp cho các em nhỏ, học sinh các cấp, và cho cả người lớn. Các thầy cô giáo cũng có thể xem cuốn sách này như là một sách hướng dẫn thực nghiệm phương pháp giảng dạy.

Chị Vương Hoa, thạc sĩ Toán học tại Nhật Bản, đã giới thiệu và dịch cuốn sách này cho Sputnik Education, từ nguyên bản tiếng Nhật sang tiếng Việt, đồng thời giúp Sputnik Education liên hệ với các tác giả về vấn đề bản quyền. Các tác giả đã viết thư cho phép Sputnik Education xuất bản cuốn sách này bằng tiếng Việt mà không lấy tiền nhuận bút. Bản dịch tiếng Việt của cuốn sách đã được giáo sư Nguyễn Tiến Dũng đối chiếu với bản tiếng Anh *("A day's adventure in Math Wonderland", World Sientific, 2008)*, và hiệu đính bản thảo giúp cho cuốn sách dễ hiểu và chính xác hơn về mặt toán học.

Sputnik Education chân thành cảm ơn các tác giả, cùng chị Vương Hoa và giáo sư Nguyễn Tiến Dũng, những người đã đem lại cuốn sách toán rất hay này cho bạn đọc Việt Nam. Phần nhuận bút không phải trả cho tác giả, Sputnik Education sẽ ủng hộ và tặng sách cho các học sinh nghèo.

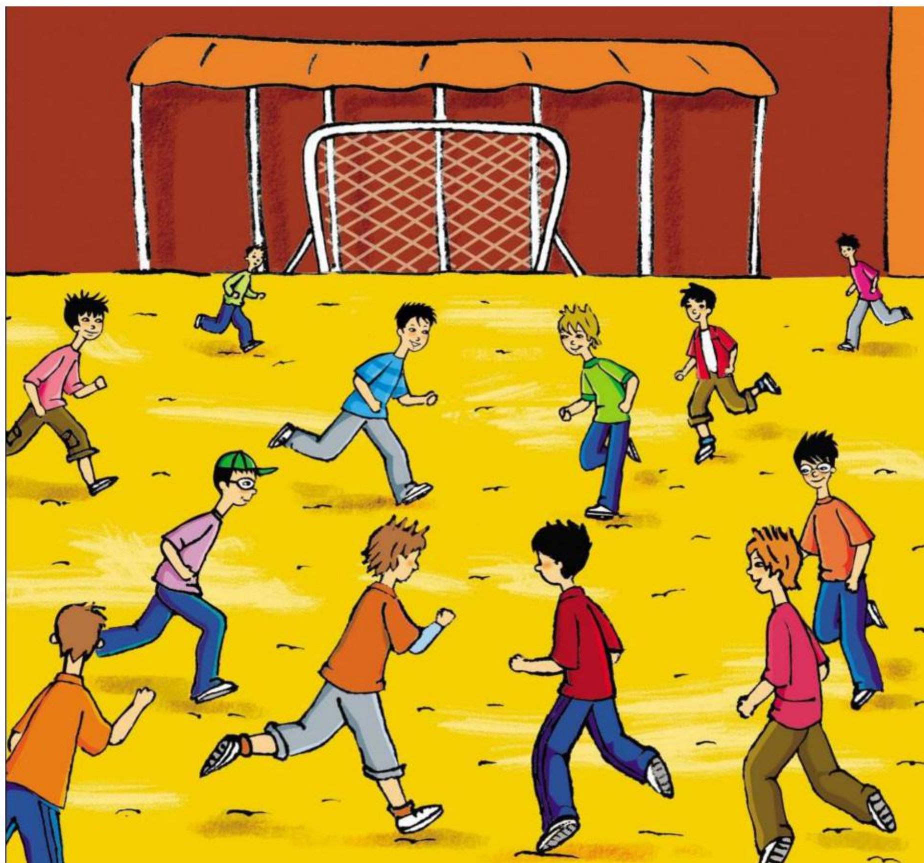
Hy vọng rằng cuốn sách sẽ trở thành một trong các sách kinh điển về toán học mà bất kỳ học sinh hay giáo viên nào cũng nên đọc.

Xin trân trọng giới thiệu cùng bạn đọc!

Sputnik Education



Chương 1 Toán học có vui không?



Tiếng chuông báo hiệu giờ nghỉ trưa. Các cậu bé chạy ùa ra sân chơi từ mọi ngả.

Ichiro nhìn xung quanh tìm hai cậu bạn thân nhất, là Jai và Kino. Cậu thấy các bạn ấy cùng với một nhóm con trai đang vây quanh Kentaro. Dường như mọi người bị thu hút bởi những điều Kentaro nói.

"Không biết Kentaro nói gì mà thú vị thế?", Ichiro tiến lại gần hơn để có thể nghe thấy.



“Thực sự là rất vui! Tớ đã đi trên chiếc xe ba bánh với những bánh xe hình vuông, ... tớ chạy xuống những bậc thang âm nhạc, ... tớ đã thắng một cuộc đua trên những ván trượt lớn ...”, Kentaro say sưa kể.

“Cậu ấy đã đi đâu thế?”, Ichiro hỏi.

“Thế giới Toán học Kỳ diệu”, Kino trả lời.

“Ồ, lại là nơi đó à”, Ichiro nói.

“Cậu nói vậy là có ý gì?”, Jai lấy làm lạ.

“Bà tớ đã không ngừng kể về nơi đó trong bữa sáng. Bà đã xem một vài cảnh trên ti vi và bảo rằng trông bọn trẻ thật là thích thú khi khám phá những mô hình toán học.” Ichiro trả lời. “Tớ không thể tưởng tượng ra được điều gì thú vị ở toán cả”, cậu bé nói thêm.

“Toán học đâu đến nỗi như vậy”, Jai phản đối.

Ichiro học tốt các môn ở trường một cách dễ dàng, nhưng toán học không đem lại hứng thú đặc biệt gì cho cậu. Cậu thấy giờ học toán chỉ trên mức buồn tẻ một chút. Nhiều lúc cậu phát ngủ gật trong lớp. Hơn nữa, bài tập toán giao về nhà lấy mất đi thời gian quý báu mà cậu dành cho các trò chơi điện tử, xem ti vi, và một trò yêu thích khác của cậu, là trò lắp ghép các đồ chơi rô bốt.

Kino lúc nào cũng háo hức và hấp tấp, vỗ vai Ichiro: “Cuối tuần này chúng mình đến chỗ đó chơi đi!”.

“Nghe hay đấy”, Jai nói.

Tự bản thân Ichiro thì sẽ chẳng màng tới việc đi đến chỗ đó, nhưng cậu nghĩ “đi chơi cùng hai cậu bạn thân thì chắc sẽ vui”, và chúng quyết định đi cùng nhau.

Cuối tuần đó, Ichiro, Jai và Kino đón chiếc xe buýt, và một lúc sau chúng đã đứng trước một tòa nhà hai tầng không có vẻ gì đặc biệt.

“Chúng mình đến đúng chỗ không nhỉ?”, Kino thắc mắc.

Cậu ấy chạy đến cửa tòa nhà, Ichiro và Jai theo sau. Ba cậu bé nhìn thấy một tấm bảng ở phía trên:

THẾ GIỚI TOÁN HỌC KỲ DIỆU



Chúng từ từ đẩy cánh cửa mở ra.

“Liệu có thú vị không nhỉ? Những bạn đã đến đây rồi có thấy phí thời gian không?”, cả ba thầm nghĩ.

Ngay khi bước vào, chúng đã nghe thấy tiếng reo hò của các cô bé cậu bé đang rất phấn khích.



Chương 2 Những tam giác mập và bánh mì bagel bẹt



Ở cửa, một phụ nữ trẻ vẫy tay chào các cậu bé. "Chào mừng các em đến với Thế giới Toán học Kỳ diệu!". Bảng tên của cô ấy ghi là Keiko. Điều đầu tiên làm các cậu bé chú ý là đôi giày trượt pa-tanh của cô ấy.

“Những cái bánh xe này kì cục thật”, Kino bình luận, “giống như những chiếc bánh mì vòng bagel[1] có viền bị bẹt ra”.

“Có hình một tam giác mập quay bên trong một hình vuông nằm ở tâm kìa”, Ichiro nói thêm.

“Và tam giác mập chạm vào tất cả các phần của hình vuông khi bánh xe quay”, Jai nói khi quan sát những chiếc bánh xe.



“Tuyệt quá, tớ chưa nhìn thấy cái bánh xe nào như thế”, Kino nói. Cậu thắc mắc không biết có thể mua những đôi giày trượt này ở đâu.

Nhưng trước khi cậu kịp hỏi, Keiko đã nói: “Em có thể mượn những đôi giày kiểu này để đi vòng quanh Thế giới Kỳ diệu đấy”.

Cô ấy dẫn cả bọn đến một cái quầy, nơi chúng nhận lấy những đôi giày trượt pa-tanh. Chúng hào hứng đi đến phòng trưng bày. Những đôi giày trượt giúp chúng di chuyển một cách nhẹ nhàng trên sàn nhà.

“Chúng hoạt động như thế nào vậy chị?”, Ichiro hỏi.

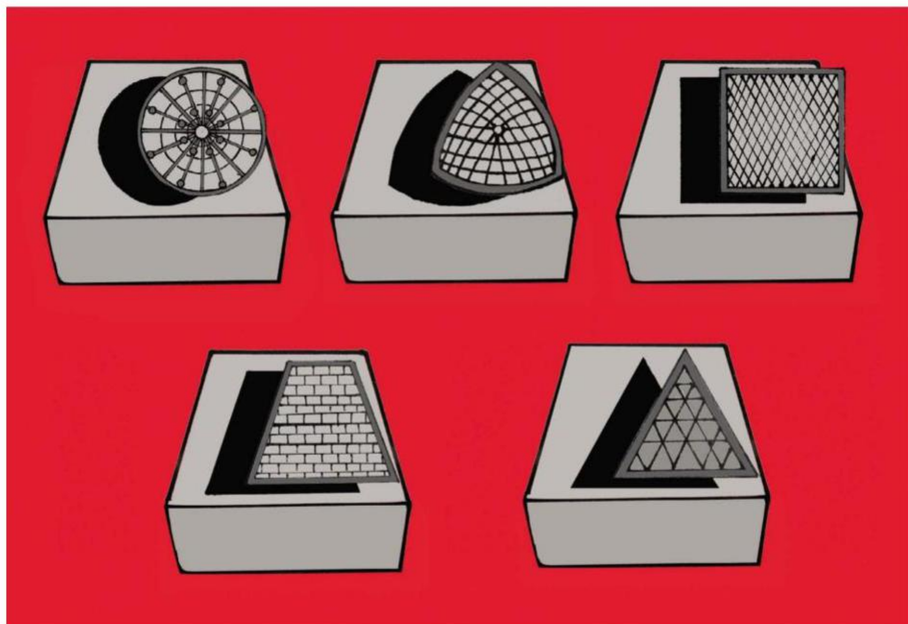
“Em sẽ thấy ngay thôi”, Keiko trả lời khi cô ấy dẫn các cậu bé đến đoạn dốc đi lên tầng hai.



Chúng thấy một căn phòng với rất nhiều đồ vật trông giống như những hình tam giác mập và những chiếc vòng bánh mì bagel viền bẹt. Một tấm biển trên cánh cửa ghi:

NHỮNG ĐƯỜNG CONG CÓ ĐỘ RỘNG KHÔNG ĐỔI

Trong một góc của căn phòng đó có trưng bày nhiều hình khác nhau của các lỗ và nắp đậy thu nhỏ. Có những cái có hình tam giác mập. Cũng có những hình khác, như là hình tròn, hình vuông, hình tam giác, hình thang.



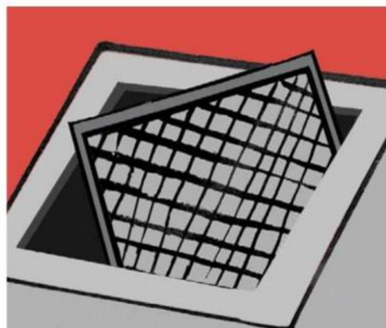
Keiko giới thiệu bọn trẻ với một trong các hướng dẫn viên phụ trách căn phòng, và nhờ anh ấy giúp đỡ chúng tìm hiểu tiếp.

“Anh tên là Koji”, anh ấy nói. "Các em hãy thử xê dịch cái nắp xem điều gì có thể xảy ra?", Koji đề nghị.

Bọn trẻ mỗi đứa xê dịch một hình rồi chuyển sang hình khác. Jai chọn lỗ và nắp đậy có hình vuông.

“Nè, nhìn kìa, cái nắp rơi xuống”, cậu gọi các bạn.

“Em biết vì sao không?”, Koji hỏi.



“Tất nhiên rồi! Cạnh thì ngắn hơn đường chéo, cho nên khi em di chuyển cái nắp theo hướng này thì nắp bị rơi xuống”.

Jai có óc phân tích tốt nhất trong số ba bạn nhỏ. Kiến thức của cậu vừa

rộng lại vừa sâu.

Ichiro và Kino mải miết với những phát hiện mới của mình.

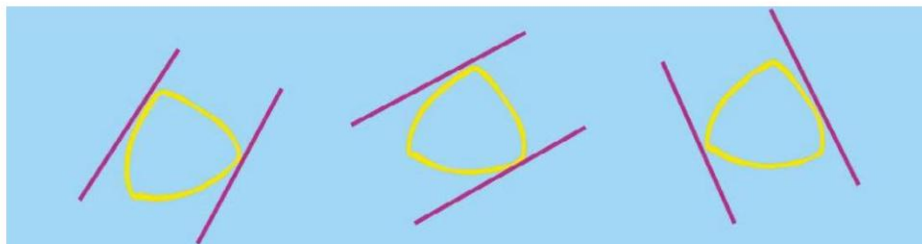
"Hình tam giác và hình thang cũng bị rơi xuống, còn hình tròn và hình tam giác mập thì lại không", Ichiro reo lên.

"Điều gì đặc biệt ở hai hình đó vậy?", Kino thắc mắc.

"Vì chúng được bao bởi đường cong có độ rộng không đổi", Koji trả lời.

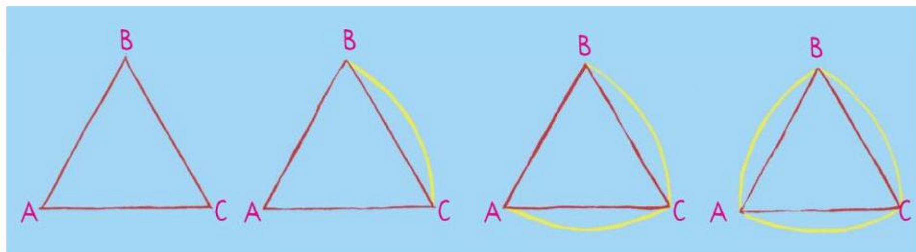
Anh ấy chỉ cho bọn trẻ tấm áp phích giải thích và minh họa các khái niệm.

Đường cong có độ rộng không đổi



Độ rộng của một đường cong được đo bởi khoảng cách vuông góc giữa hai đường thẳng song song đối diện tiếp xúc với đường biên của nó. Nếu khoảng cách này là như nhau tại bất kì hướng nào của tiếp tuyến, thì đường cong đó được gọi là có độ rộng không đổi.

Cách dựng một tam giác Reuleaux



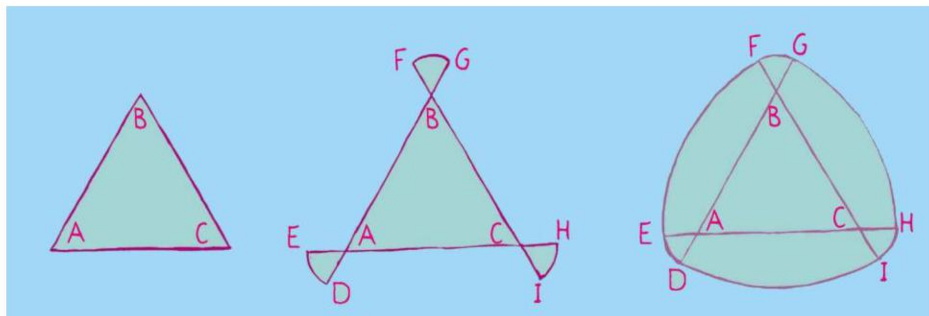
Bắt đầu với một tam giác đều ABC.

Kẻ cung BC của đường tròn tâm A, cung CA của đường tròn tâm B và cung AB của đường tròn tâm C.

Vì tam giác ABC là đều, nên tất cả các đường tròn này đều có cùng bán kính, và các cung BC, CA và AB tạo thành đường biên của tam giác Reuleaux.

“Tam giác Reuleaux – vậy đây là cách mà người ta gọi cho tam giác mập đấy”, Kino nhận xét.

Cách dựng những đường cong khác có độ rộng không đổi

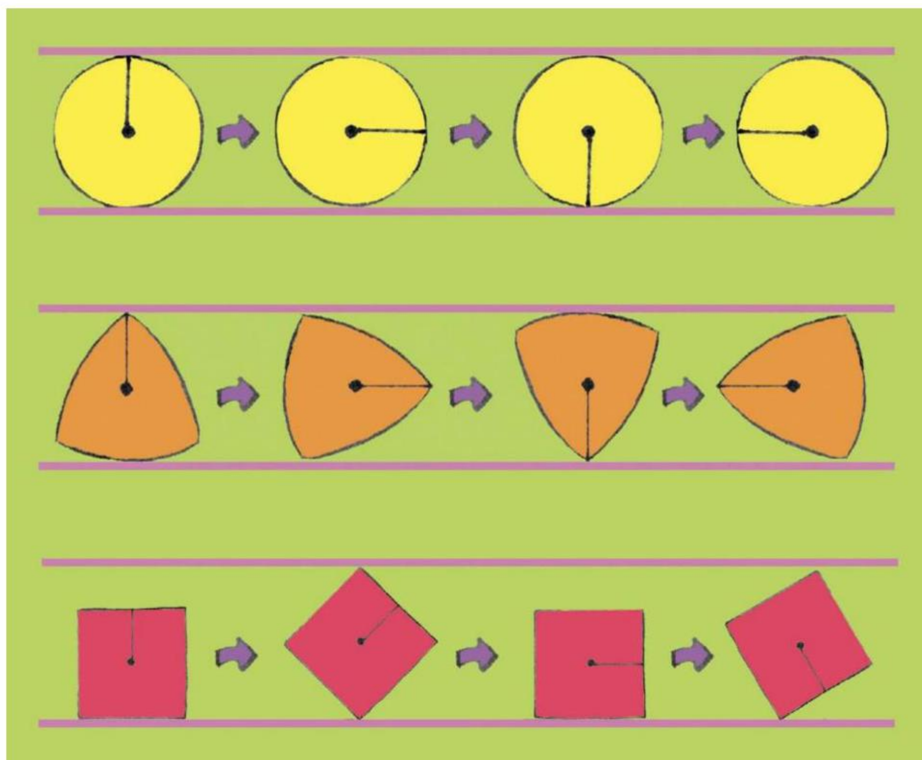


Bắt đầu với một tam giác đều ABC.

Tại mỗi đỉnh, mở rộng các cạnh về phía bên kia của đỉnh, với cùng độ dài, tạo thành các góc 60 độ bên ngoài tam giác.

Vẽ cung DE của đường tròn tâm A, cung FG của đường tròn tâm B, và cung HI của đường tròn tâm C. Vì các cạnh của tam giác được mở rộng cùng độ dài về phía ngoài đỉnh, nên các đường tròn này có cùng bán kính. Vẽ cung FE của đường tròn tâm C, cung GH của đường tròn tâm A, và cung ID của đường tròn tâm B. Tất cả các đường tròn này đều có cùng bán kính. Tất cả các cung được vẽ cùng nhau tạo nên đường biên của một đường cong có độ rộng không đổi.

Như để chứng minh, Koji lăn các khối hình giữa hai đường thẳng song song và chỉ ra hình tròn và hình tam giác Reuleaux đều chạm cả hai đường tại bất cứ lúc nào khi chúng lăn, trong khi đó hình vuông thì không như vậy.



Koji bình luận: “Bây giờ thử đặt miếng ván lên trên và lăn các hình có độ rộng không đổi. Dù lăn hình tròn hay hình tam giác mập thì miếng ván vẫn dịch chuyển song song, giữ nguyên cùng một mức”.

“Vâng”, bọn trẻ gật đầu. Koji tiếp tục:

“Và bây giờ nhìn nhé, khi quay hình tròn, tâm của đường tròn luôn luôn giữ một độ cao cố định. Vì thế, khi bánh xe có hình tròn thì có thể gắn nó vào trục quay tại tâm hình tròn. Nhưng khi bánh xe có hình bagel bẹt (cũng là một hình có độ rộng không đổi) thì tâm điểm của nó sẽ nhấp nhô khi quay. Để cho pa-tanh khỏi bị nhấp nhô, người ta làm trục quay bánh xe hình tam giác Reuleaux và cho nó quay trong một cái khung hình vuông gắn vào pa-tanh. Biên của tam giác Reuleaux này cách đều biên của hình bagel bẹt, cho nên khi bánh xe quay thì hình vuông và pa-tanh sẽ giữ được độ cao không đổi”.

“Các khối hình có độ rộng không đổi sẽ chuyển động dễ dàng, trơn tru trên bề mặt phẳng. Các em có cảm thấy đôi giày trượt của các em cũng chuyển động rất nhẹ nhàng không nào?” Koji hỏi và ba cậu bé cùng gật đầu.

“Có rất nhiều đường cong có độ rộng không đổi phải không anh?”, Kino hỏi.

“Từ một tam giác đều em có thể vẽ nên được tam giác Reuleaux. Hoàn toàn tương tự như vậy, từ hình ngũ giác đều hay thất giác đều cũng có thể vẽ được ngũ giác Reuleaux hay thất giác Reuleaux. Tóm lại là có thể vẽ được nhiều đường cong có độ rộng không đổi”. Koji trả lời, và anh ấy chỉ cho bọn trẻ khung ảnh chứa một đồng xu từ Bermuda có hình dạng giống tam giác Reuleaux và một đồng xu cũ của nước Anh có hình dạng giống một thất giác Reuleaux.



Bên kia căn phòng ghi dòng chữ:

LỖ VUÔNG

"Cái máy đặc biệt này đục được những lỗ hổng hình vuông", Koji cho biết.

"Thật hả anh?", Ichiro ngạc nhiên hỏi.

Jai và Kino cũng tỏ vẻ nghi ngờ.

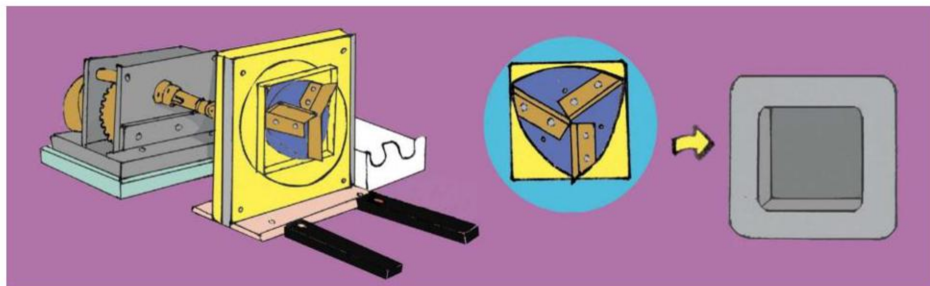
"Đây, một em thử giữ miếng xốp này áp vào mũi dao mà kiểm tra xem", Koji nói.

Ichiro bước về phía trước, đứng ngang với cái máy. Cậu bé rất thích thú với các loại máy móc. Những lưỡi dao được sắp xếp cân đối bên trong một tam giác Reuleaux. Khi Koji khởi động máy, Ichiro quan sát thấy những lưỡi dao chuyển động bên trong một hình vuông. Chúng chuyển động từ đỉnh bên trái sang bên phải, sau đó xuống phía bên phải, và khi chúng chạm đáy, thì chúng di chuyển từ phải sang trái, rồi trở về đỉnh, giống như sự chuyển động của tam giác mập trong đôi giày trượt. Khi chuyển động, chúng sẽ chạm đến mọi điểm trên viền của hình vuông, ngoại trừ những điểm tận sâu trong góc.

"Cứ tiếp tục như thế, áp xốp ngược với lưỡi dao", Koji hướng dẫn.

Ichiro cứ làm theo và khi tắt máy, quả nhiên có một cái lỗ hình vuông trên miếng xốp, mặc dù nó hơi tròn ở các góc.

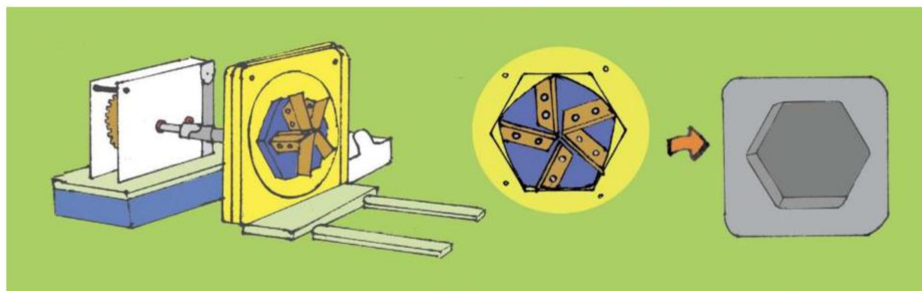
"Thật là khéo quá đi", các cậu bé reo lên.



Ở máy tiếp theo có ghi:

LỖ HÌNH LỤC GIÁC

Chúng nhìn thấy những lưỡi dao được sắp xếp cân đối bên trong ngũ giác Reuleaux. Không còn hoài nghi như ban đầu, chúng tin rằng sẽ được nhìn thấy một lỗ hổng lục giác. Kino cũng tham gia vào màn trình diễn chỉ để xác nhận lại kết quả.



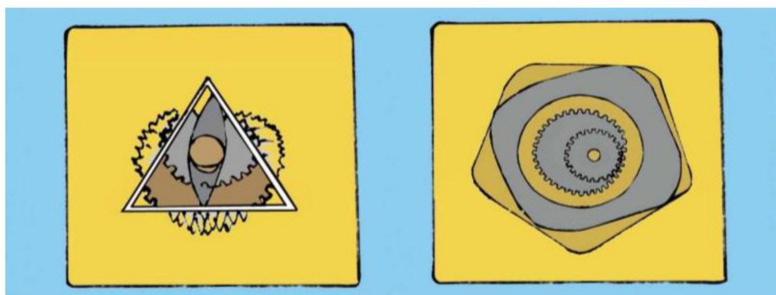
Jai suy nghĩ nhanh hơn hẳn hai cậu bé kia, và cậu đã có được phát hiện "eureka"[2].Cậu bé đã có một suy luận.

"Lưỡi dao tam giác mập, lỗ vuông, lưỡi dao ngũ giác mập, lỗ lục giác. Có quy luật đây. Lưỡi dao hình thất giác mập sẽ khoét ra lỗ bát giác, và cứ tiếp tục như thế phải không ạ?". Cậu bé nói trong niềm hân hoan, vui sướng.

"Chính xác là như vậy", Koji khích lệ.

"Nhưng mà anh có thể cắt ra những lỗ hổng có số cạnh là lẻ không?", Ichiro hỏi.

"Có chứ, ở đây có những lưỡi dao có thể cắt hình tam giác và hình ngũ giác. Có điều đây là những lưỡi dao có độ rộng thay đổi", Koji trả lời, và chỉ cho bọn trẻ những lưỡi dao đó ở một chỗ.



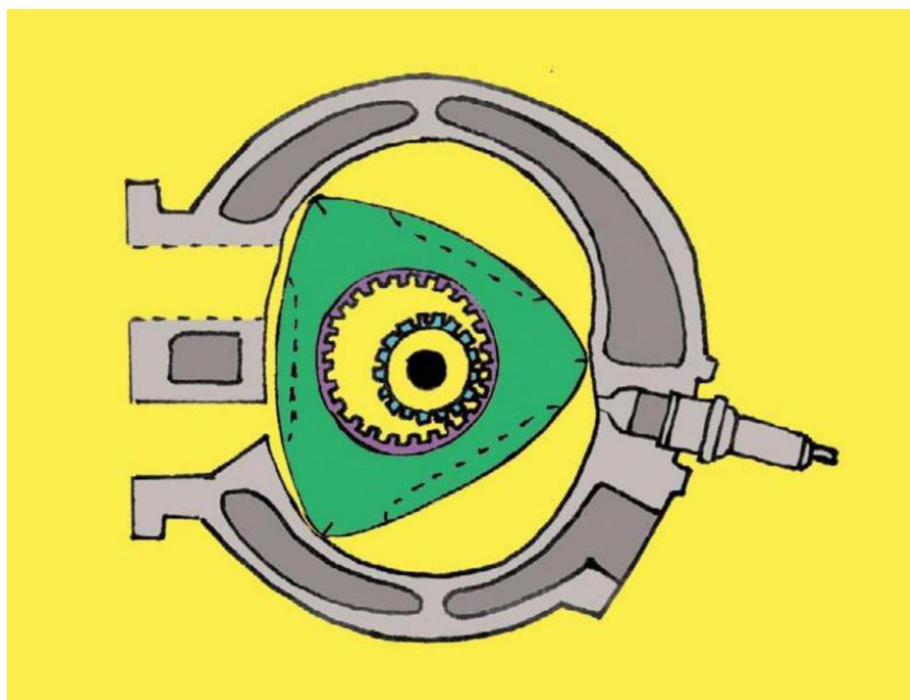
Nhưng còn cái này rất hay nữa", Koji tuyên bố.

Anh dẫn cả bọn đến bên một cái máy khác. "Đây là một động cơ đốt trong xoay mà các em có thể nhìn thấy trong những chiếc ô tô".

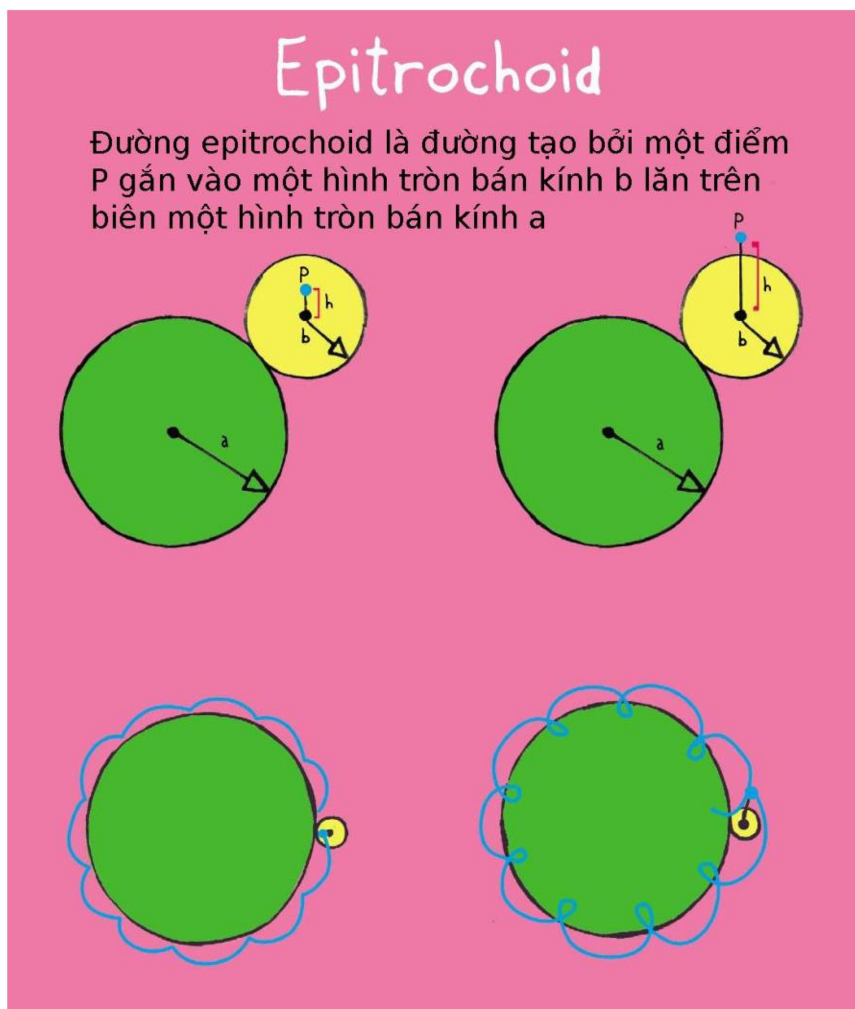
"Lại có một hình tam giác mập nữa này – nằm bên trong một cái vỏ bọc", Kino quan sát thấy.

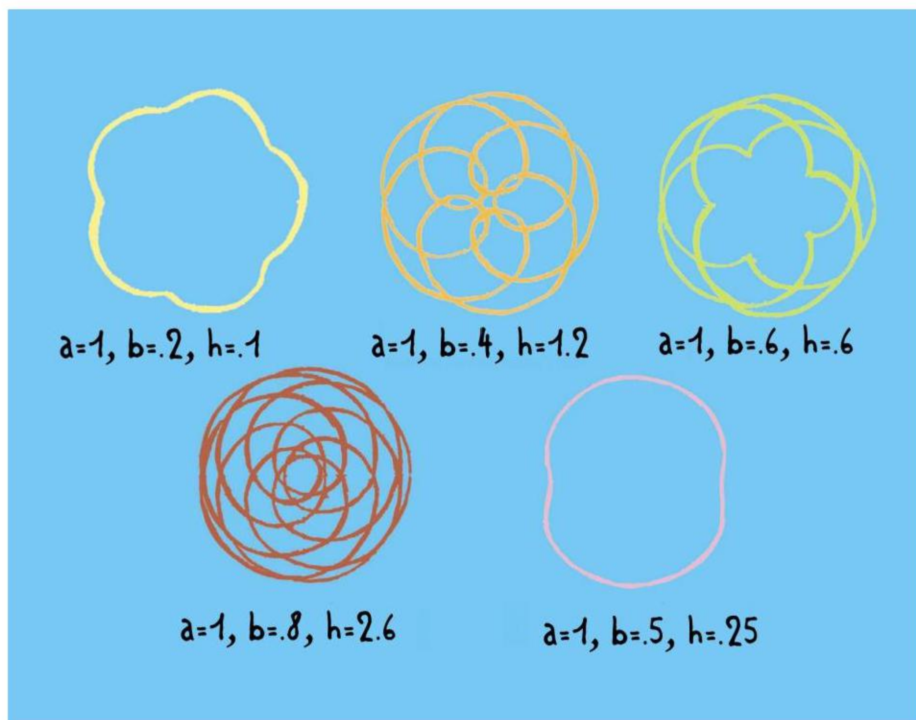
"Đúng rồi, vỏ bọc này được gọi là *bore* của động cơ, và tam giác Reuleaux bên trong bore là một *rotor*, hay còn gọi là cánh quạt", Koji tiếp tục, "Hình dáng của vỏ bọc là dựa trên một đường cong *epitrochoid*. Đường cong này được phác họa bởi quỹ tích trung điểm của một bán kính đường tròn khi nó di chuyển xung quanh chu vi của một đường tròn khác có đường kính gấp hai lần đường kính của nó".

Một tấm áp phích trên tường minh họa những đường cong epitrochoid khác nhau.



Koji giải thích: “Các em nhìn xem, ba đỉnh của rotor chạm vào bore tại ba điểm, tạo thành ba khoảng trống, hay gọi là ba buồng. Khi roto quay, mỗi buồng sẽ luân phiên mở rộng ra và thu hẹp lại. Khi buồng mở rộng ra, một hỗn hợp của nhiên liệu và không khí được hút vào đó. Khi buồng thu hẹp lại thì hỗn hợp bị nén vào và được dịch chuyển về phía bugi, hay còn gọi là nút tia lửa. Các bugi đốt cháy nhiên liệu. Khi nhiên liệu cháy, khí sẽ nở ra đẩy rotor xoay, rồi đến lượt khí thải bị đẩy ra ngoài. Vì vậy quá trình trên bao gồm bốn bước: hút, nén, nổ, xả”.

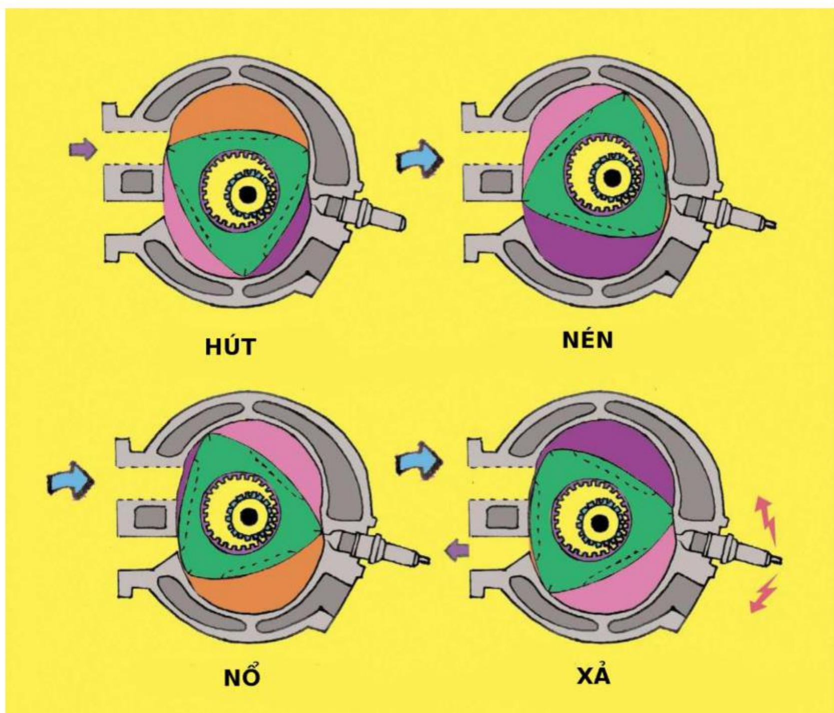




"Đốt cháy nhiên liệu, hay quá trình nổ, tạo ra một lực đẩy ô tô chuyển động", anh ấy kết luận.

Ichiro không hoàn toàn hiểu hết câu chuyện, nhưng cậu bị thuyết phục bởi những ứng dụng hữu ích của tam giác Reuleaux, và hai người bạn kia cũng vậy.

Bọn trẻ cảm ơn anh Koji và bước tiếp, háo hức muốn được nhìn thấy và trải nghiệm nhiều hơn.


HÚT
NÉN
NỔ
XẢ



Chương 3 Những đường cong tuyệt diệu



Các cậu bé bị thu hút bởi âm thanh náo nhiệt của những đứa trẻ khác đang cổ vũ cho ai đó.

"Chúng mình đến xem cái gì đang diễn ra đi", Ichiro đề nghị.

"Nghe có vẻ hấp dẫn", Kino đồng ý.

Khi đến khu đó, chúng nhìn thấy bốn chiếc cầu trượt lớn, trong đó ba cái có dạng đường cong và một cái đường thẳng. Có bốn đứa trẻ ở phía trên đang sẵn sàng cho một cuộc đua.

"Tớ nghĩ cái cầu trượt hình đường thẳng sẽ thắng", Kino đề xuất ý kiến. "Chẳng phải chúng ta đã được học rằng đường ngắn nhất nối hai điểm là đường thẳng sao?".

Ichiro và Jai thì không tin chắc như vậy.

"Chúng mình cứ xem cái đã", Jai thận trọng nói.

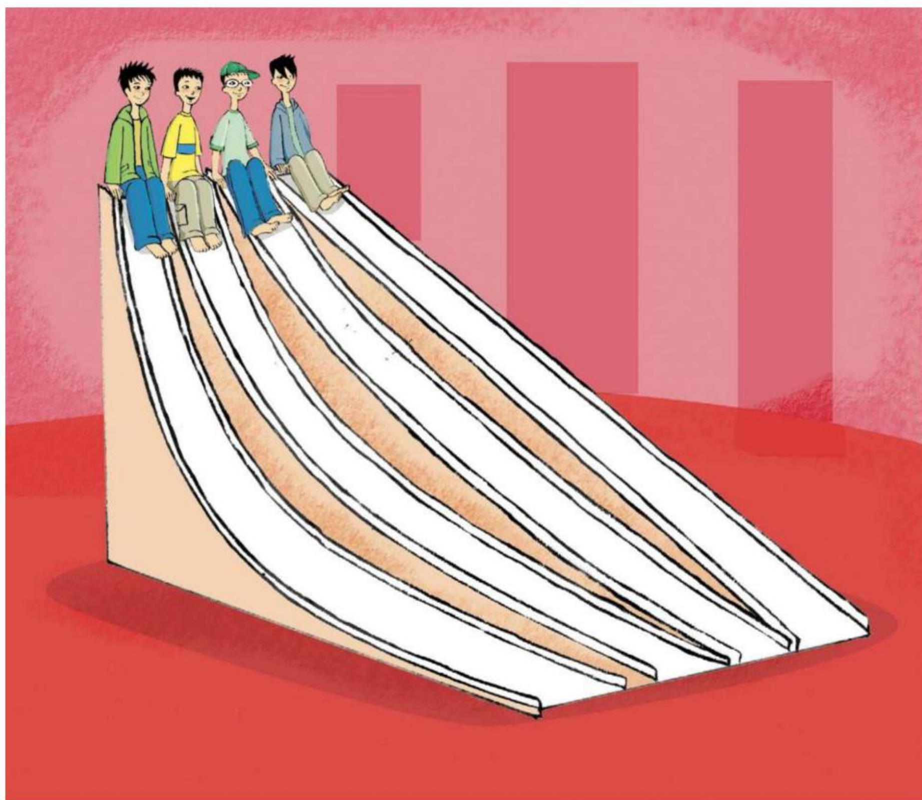
Một hướng dẫn viên ra hiệu bắt đầu cuộc đua. Bọn trẻ trượt xuống. Người thắng cuộc là đứa trẻ ở trên cầu trượt thứ hai từ trái qua. Ngay khi nhóm đầu tiên chạm đất, thì một nhóm bốn bạn nhỏ khác lại chuẩn bị sẵn sàng cho cuộc đua.

Chúng xem lần nữa, vẫn thấy bạn ngồi trên đường số hai thắng.

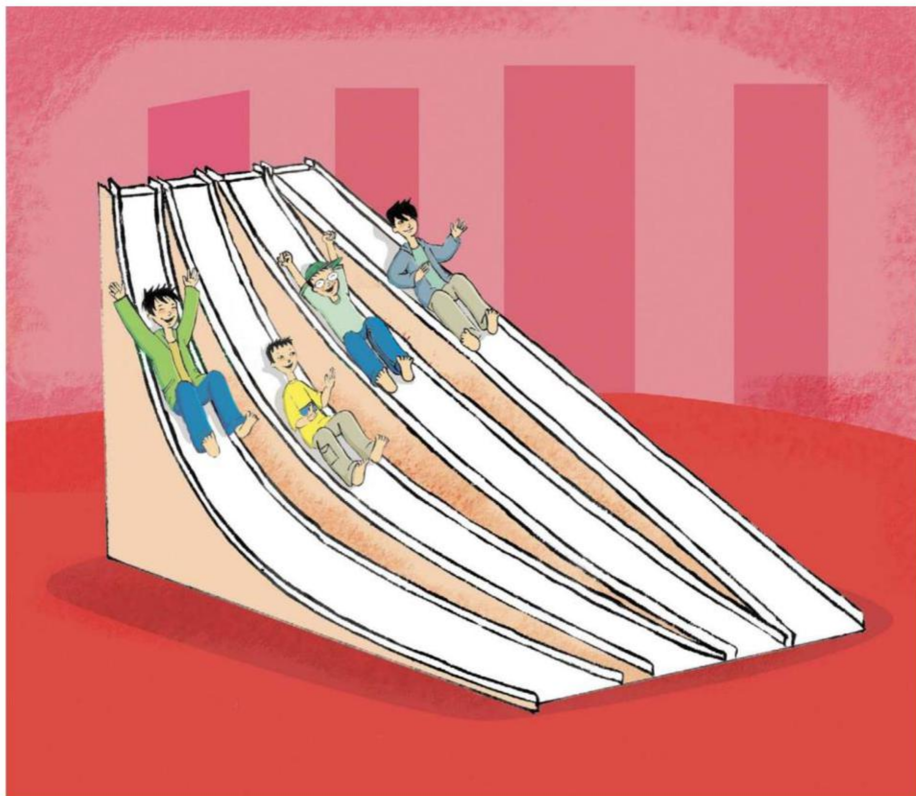
“Đó có phải là một sự trùng hợp ngẫu nhiên không?”, Jai thắc mắc.

Chúng xem cuộc đua thứ ba, và kết quả vẫn như vậy.

“Tại sao nhỉ?”, chúng hỏi nhau.



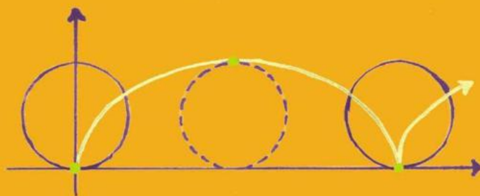
Người hướng dẫn cuộc đua tên là Miki. Anh ấy gọi mọi người tham gia trò chơi. Ba cậu bé chạy đến. Một cậu bé khác được chọn để tham gia cùng chúng. Chúng cởi đôi giày trượt ra và Miki đặt từng cậu lên cân. Anh ấy đưa cho chúng những bịch cát bỏ vào trong túi để cân nặng mỗi người là bằng nhau, và đưa cho chúng những miếng lót mông để ngồi lên trượt được dễ dàng. Cả ba đều muốn ngồi trên đường số hai, nhưng anh Miki đã ra hiệu cho Ichiro ngồi vào đấy.



Như dự đoán, Ichiro đã thắng. Chúng tiến đến Miki và hỏi: “Anh có thể cho tụi em biết vì sao như vậy không ạ?”.

“Vì đường cong nằm trên đường thứ hai từ trái qua rất đặc biệt. Nó được gọi là đường cycloid”. Miki nói và chỉ cho chúng tấm áp phích treo trên tường.

Cycloid

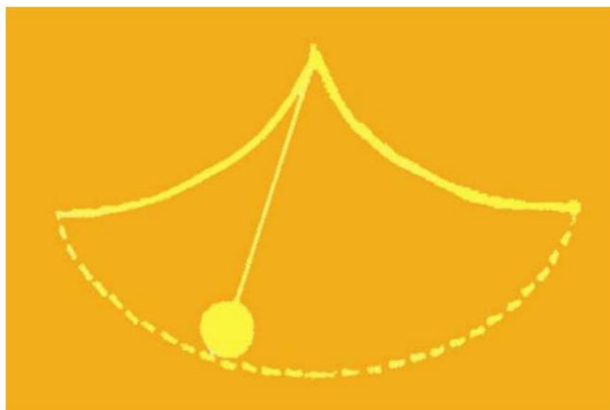


Đường cycloid là đường cong được phác họa bởi một điểm cố định nằm trên một đường tròn khi đường tròn này lăn trên một đường thẳng.

Đường trượt nhanh nhất

Trong số các đường cầu trượt từ một điểm trên cao xuống một điểm dưới thấp thì đường cycloid xoay ngược là đường cho thời gian trượt ngắn nhất. (Các vật trượt do trọng lực hút xuống dưới). Tính chất này được nhà toán học Thụy Sĩ Johann Bernoulli phát hiện từ năm 1669, và còn được gọi là tính chất brachistochrone. (Brachisto = ngắn nhất, chrono = thời gian).

Tính chất đẳng thời (tautochrone)



Đường cycloid ngược cũng có tính chất: Một vật dù đặt ở vị trí nào trên đường thì thời gian để nó trượt xuống đến điểm dưới cùng là như nhau. Tính chất này gọi là tính chất đẳng thời, hay tautochrone (tauto = không đổi, chrono = thời gian). Nó được nhà bác học người

Hà Lan Christian Huygens khám phá vào năm 1673. Huygens đã sử dụng nó trong thiết kế đồng hồ quả lắc đầu tiên. Con lắc được dao động theo một cung của đường cycloid ngược, bị chặn trên bởi hai nửa cung của cùng một đường cycloid ngược. Thời gian của các vòng lắc sẽ xấp xỉ như nhau bất kể là nó lắc mạnh hay nhẹ.

“Về phần này anh có thể giải thích rõ hơn không ạ?”.

Jai đề cập đến đoạn trình bày cuối cùng trên tấm áp phích, để hiểu rõ hơn về cái được gọi là “cycloid là đường cong đẳng thời”.

“Để giải thích chính xác điều này cần sử dụng những phương trình vi phân, đối với các em hiện tại là hơi khó quá. Chúng ta thử kiểm chứng bằng thí nghiệm nhé”, Miki đề nghị.

Và bọn trẻ quay trở lại những cái cầu trượt.

“Được rồi, bây giờ một em hãy leo lên cầu trượt số hai và trượt xuống”.

Kino xung phong ngay.

"Chúng ta sẽ đo thời gian em trượt xuống nhé".

Thời gian Kino trượt từ đỉnh xuống dưới đất là 1,34 giây theo đồng hồ.

"Bây giờ em leo lại lên cầu trượt thứ hai, nhưng ngồi ở vị trí có độ cao bằng ba phần tư độ cao ban đầu, rồi trượt xuống". Miki hướng dẫn, và lần này thì thời gian để trượt xuống đất cũng là 1,34 giây.

“Ồ, ngạc nhiên chưa”, Ichiro thốt lên. Jai cũng nghĩ như thế.

“Vậy lần này mình bắt đầu lại ở giữa đoạn đường đi”, Jai gợi ý.

Kết quả thử nghiệm lần nữa cũng mất 1,34 giây. Jai ghi nhớ dòng chữ “đường cong đẳng thời”. Và Kino thì rất vui sướng khi được làm "chuột bạch" cho thí nghiệm.

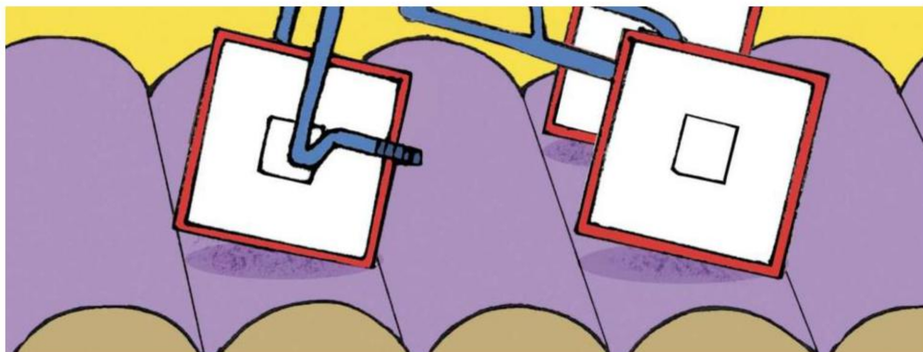
Chúng cảm ơn anh Miki, và để ý thấy ở một góc của căn phòng, bọn trẻ đang xếp hàng chờ đợi một điều gì đó. Kino chạy đến tìm hiểu và trở lại rất nhanh.

“Đó là chiếc xe ba bánh với những bánh xe hình vuông, cái mà Kentaro đã nói đến ấy”.

Kino đến xếp hàng và hai người bạn của cậu cũng đến gần hơn để xem.



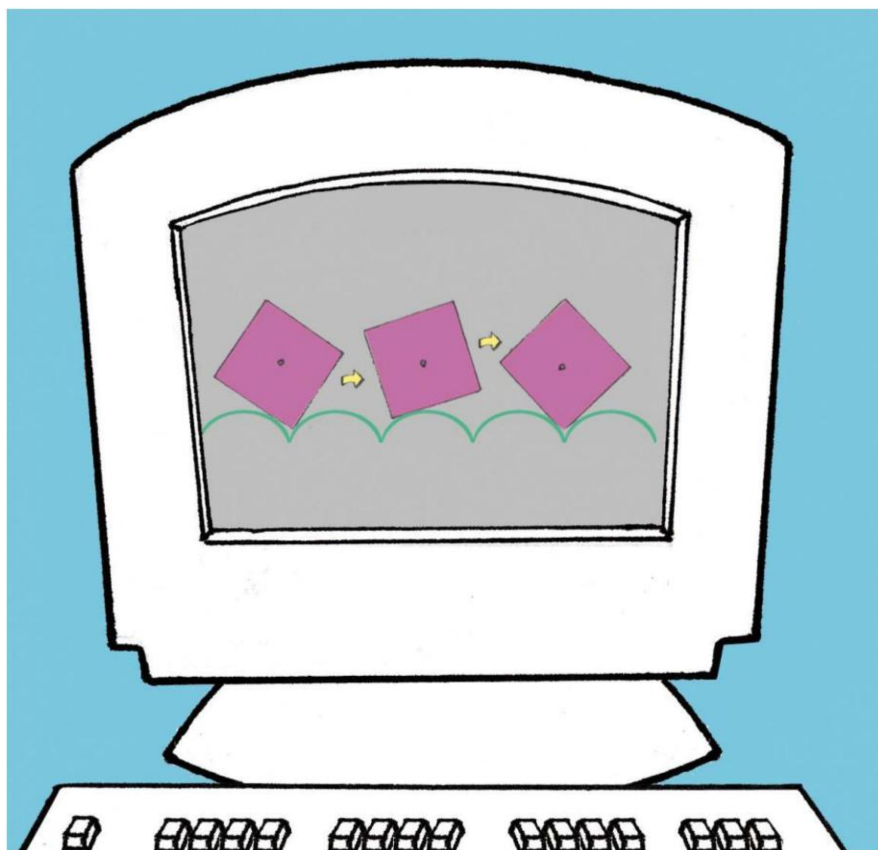
“Chiếc bánh xe hình vuông thực sự di chuyển về phía trước, nhưng nhìn con đường nó đi kìa, nhiều đường cong giống nhau được xếp thành một con đường gập ghềnh”, Ichiro quan sát.



“Con đường gập ghềnh này có lẽ là một đường cong đặc biệt gì đó”. Jai đề xuất. Liệu bánh xe hình vuông của xe đạp ba bánh này có di chuyển được trên những đường cong khác không nhỉ?”.

Một người hướng dẫn viên tên là Hiro tình cờ nghe thấy bọn trẻ nói và cố gắng giải thích cho chúng.

"Đường cong phải thỏa mãn một số điều kiện thì bánh xe hình vuông mới lăn trơn tru được trên nó. Độ dài của mỗi cung của đường cong phải bằng độ dài cạnh của bánh xe. Khi bánh xe lăn đi, cạnh của bánh xe luôn luôn tiếp xúc với đường cong, và tâm của bánh xe phải di chuyển theo một đường nằm ngang".



Hiro dẫn bọn trẻ đến chỗ màn hình máy tính, nơi mà chúng thấy một hình vuông chuyển động trên một con đường cong.

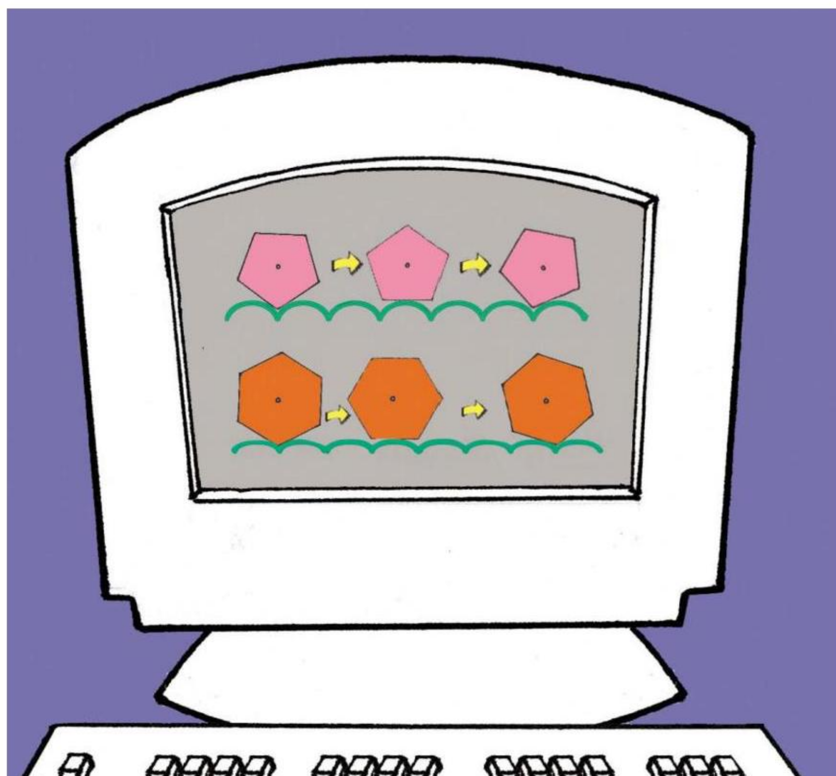
“Nền đường bao gồm các khúc *đường võng*[1] lộn ngược đặt nối tiếp nhau”, Hiro nói.

“Đường võng là gì ạ?” Ichiro hỏi.

“Khi một sợi dây dược treo lỏng, với hai đầu gắn vào hai điểm cố định nào đó, thì nó võng xuống thành hình một đường gọi là đường võng”.

Trên màn hình máy tính chúng nhìn thấy những đa giác khác chuyển động trên những con đường tạo bởi các khúc đường võng.

“Nhìn kìa, ngũ giác và lục giác cũng làm được”, Ichiro chỉ ra.



“Nhưng các khúc đường võng trở nên phẳng hơn”, Jai nhận thấy.

“Đa giác đều nhiều cạnh hơn thì có chuyển động được không ạ?”, Ichiro hỏi.

“Được em ạ, nhưng khi số cạnh tăng lên, đa giác đều sẽ dần dần trở thành tròn hơn, và các khúc đường võng cũng dần trở nên thẳng ra”, Hiro giải thích.

Jai âm thầm ghi nhận kiến thức rằng khi số cạnh của đa giác đều tăng dần lên thì hình dạng của đa giác dần tiến đến hình tròn.

“Anh có một câu hỏi cho các em suy nghĩ đây”, Hiro bảo. “Tại sao không làm như vậy được với các tam giác đều? Hãy thử tìm ra lý do?”.

"Có phải bởi vì nó không thể lăn được trơn tru trên đường võng gấp khúc?". Jai được khơi gợi trí tò mò, cậu định sẽ suy nghĩ thật cẩn thận sau đó, bài toán này cậu đã ghi nhớ lại rồi.

Kino quay trở lại sau khi đạp chiếc xe đạp ba bánh, vỗ vai Ichiro: "Đạp xe này vui lắm! Nhưng cũng phải hơi gắng sức mới đạp được".

Trên một tấm áp phích là một clothoid, một đường cong khác mà chúng chưa từng nhìn thấy.

Phần giải thích về chuyển động của xe rô bốt thu hút sự chú ý của Ichiro. Còn Kino thì chợt nhớ tới tàu lượn siêu tốc Eejanaika[2] mà bọn chúng đã được đi ở công viên tiêu khiển Fuji-Q Highlands.

“Những vòng lượn của tàu siêu tốc Eejanaika là vòng clothoid hay là vòng tròn nhỉ?”, Kino hỏi hai cậu bạn.

“Tớ nghĩ là vòng clothoid”, Ichiro đáp.

“Tại sao vòng clothoid lại an toàn hơn vậy nhỉ?”, Jai hỏi.

Hiro cố gắng giải thích: “Điều này liên quan đến vật lý. Đó là sự tương tác giữa vận tốc, gia tốc hướng tâm, trọng lực và độ cao của đỉnh”.

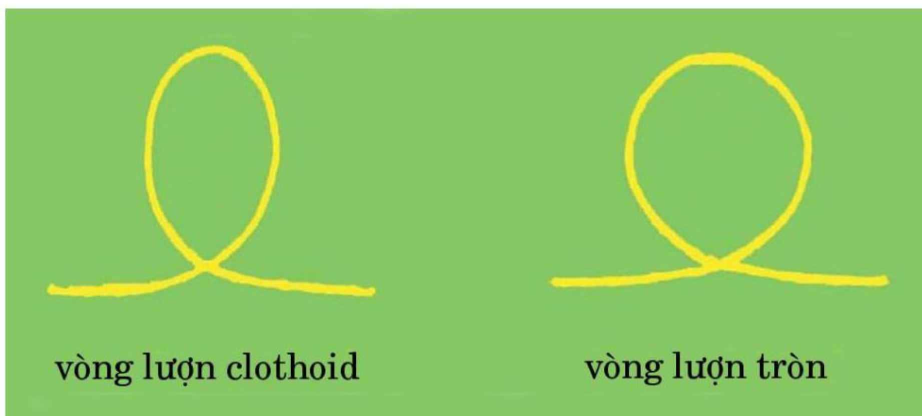
Vì vật lý vẫn còn nằm ngoài phạm vi hiểu biết của các cậu bé nên chúng chuyển sang xem những thứ khác.



CLOTHOID là một đường xoắn đôi có độ cong tăng dần lên tại một điểm chạy trên đường này về một phía nào đó tính từ tâm.

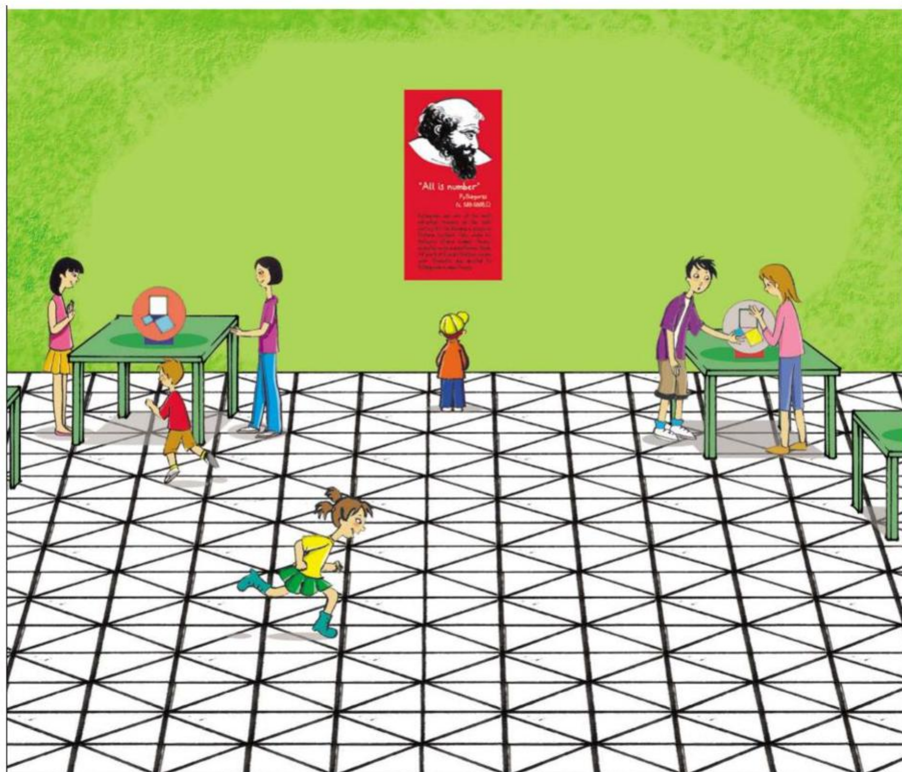
Một cung của đường clothoid là một đường nối trơn nhất giữa một đường thẳng và một đường tròn. Do đó, nó là một loại hình dạng lý tưởng cho việc thiết kế các đường cao tốc và đường sắt. Các cung clothoid cũng được sử dụng trong thiết kế chuyển động của xe rô bốt.

Tàu lượn siêu tốc ngày nay cũng sử dụng những vòng clothoid thay cho những vòng tròn trong thiết kế trước kia. Với vòng tròn, tàu chuyển động chậm lại tại đỉnh, vì thế cần vận tốc khi vào lớn hơn để chạy được qua đỉnh. Điều này làm cho tàu chạy quá nhanh ở khúc cuối của vòng. Một vòng clothoid với bán kính nhỏ hơn tại đỉnh và lớn hơn tại đáy sẽ giải quyết được vấn đề đó.





Chương 4 Căn phòng đầy tam giác vuông



Có những người đang xếp hàng phía trước một trong các căn phòng. Tấm biển ở cửa phòng đó ghi:

PHÒNG PYTHAGORAS

"Pythagoras là cái gì?", Kino hỏi.

"Không phải là cái gì, mà là người nào", Ichiro phản đối.

"Ông ấy là một nhà toán học người Hy Lạp, từ thời xưa rồi", Jai giải thích rõ hơn.

"Ông ấy có lẽ rất quan trọng nên mới có một phòng riêng đề tên ông", Kino trầm ngâm.

Khi đứng chờ xếp hàng, chúng có thể nhìn thấy phía bên trong căn phòng. Nó ngập tràn các màu sắc. Những bức tường màu sáng làm nổi bật sàn nhà màu trắng ngà.

“Nhìn sàn nhà kìa, nó được lát bởi những hình tam giác”, Ichiro quan sát.

“Là những tam giác vuông cân”, Jai nói.

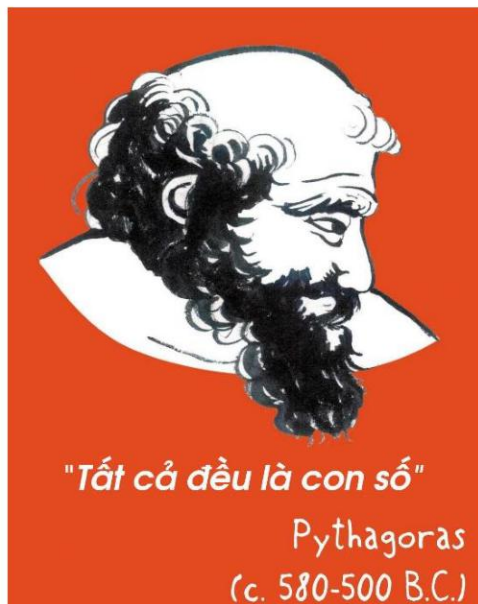
Khi bọn trẻ bước vào, chúng nhìn thấy một bức phác họa chân dung Pythagoras chiếm một vị trí nổi bật trên tường.

“*Tất cả đều là con số* có nghĩa là gì nhỉ?”, Kino thắc mắc.

Một người hướng dẫn, là chị Miho, đã nghe thấy và đi đến gần bọn trẻ.

"Pythagoras tin rằng tất cả mọi thứ trong vũ trụ này đều gắn liền với các con số. Vì thế ông ấy và các học trò nghĩ rằng họ có thể khám phá bí mật của vũ trụ bằng việc học các tính chất của những con số".

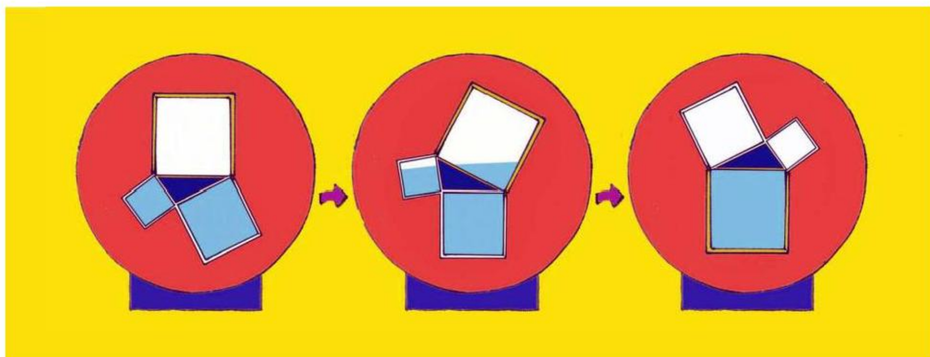
Một bên của căn phòng có một vài dụng cụ xoay. Nhiều em nhỏ đang vây xung quanh chúng. Kino lách mình đi lên phía trước. Ichiro và Jai thì rụt rè, từ từ nhích lên từng chút một.



Dụng cụ đầu tiên có một tam giác vuông ở giữa và trên mỗi cạnh của nó là một hình vuông.

Pythagoras là một trong những nhà tư tưởng có ảnh hưởng lớn nhất ở thế kỉ thứ 6 trước Công nguyên. Ông đã thành lập một ngôi trường ở Crotona, miền Nam nước Ý, nơi các học trò của ông được học lý thuyết số, hình học, âm nhạc và thiên

văn. Quyển 7, 8 và 9 trong 13 quyển thuộc bộ sách “Cơ sở” của Euclid là về lý thuyết số của Pythagoras.



Khi dụng cụ này quay, dung dịch nước màu xanh chuyển từ hai hình vuông nhỏ sang hình vuông lớn nhất.

Khi hình vuông lớn nhất được đổ đầy dung dịch, thì hình vuông nhỏ và trung hoàn toàn rỗng. Một biển hiệu trên đó ghi:

ĐỊNH LÝ PYTHAGORAS

$$x^2 + y^2 = z^2$$

“Phương trình đó có liên quan gì đến tam giác và các hình vuông vậy?”, Kino hỏi.

Ichiro trầm tư suy nghĩ một lúc. Cuối cùng cậu ấy nói: “z là độ dài cạnh huyền của tam giác vuông, còn x và y là độ dài hai cạnh góc vuông”.

“z^2 là diện tích của hình vuông nằm trên cạnh huyền, còn x^2 và y^2 là diện tích các hình vuông nằm trên hai cạnh góc vuông”. Jai tiếp nối. “Tóm lại, phương trình này nói rằng tổng bình phương các cạnh góc vuông bằng bình phương cạnh huyền. Ví dụ, nếu độ dài các cạnh là

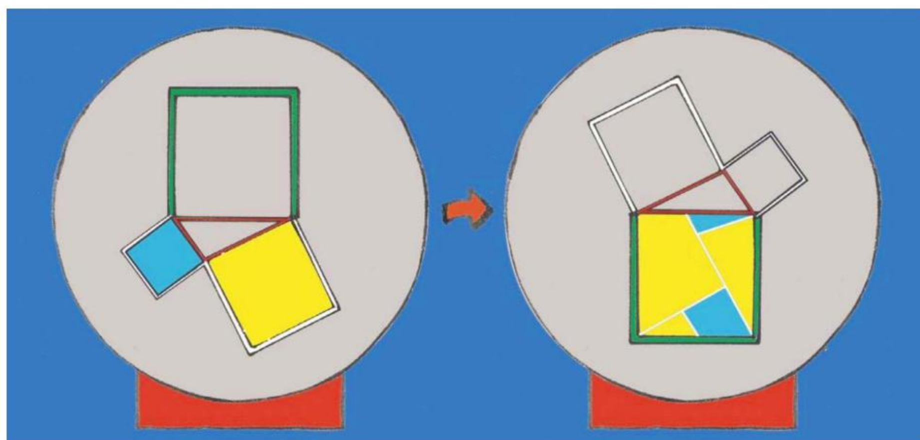
$$x = 3, y = 4, z = 5 \text{ thì } 9 + 16 = 25$$

“Đó là lý do tại sao dung dịch lấp đầy hình vuông lớn nhất khi được trút hết ra từ hai hình vuông kia”, Ichiro nói thêm.

"Thì ra là như vậy, mình hiểu rồi", Kino đáp.

"Định lý Pythagoras nói rằng điều này đúng cho mọi hình tam giác vuông", Miho nói với các em.

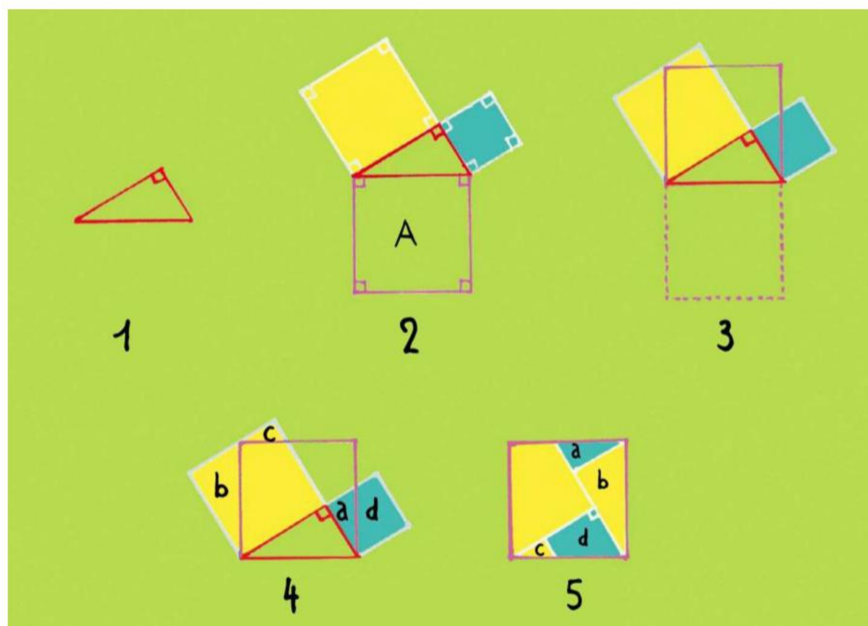
Jai ghi nhẩm trong đầu rằng khi về nhà cậu sẽ làm nhiều tam giác vuông khác nhau để kiểm định lại công thức này. Ichiro thì quan tâm hơn đến thiết kế làm cho dụng cụ quay được và dung dịch chảy ra vào các hình vuông như thế nào. Cậu bé đứng ngắm nhìn dụng cụ một hồi lâu. Còn Kino đã đi xem chỗ khác.



Ở dụng cụ thứ hai, hiện tượng tương tự cũng xảy ra, chỉ có điều thay vì chất lỏng thì có các miếng nhựa màu di chuyển từ hai hình vuông nhỏ sang lấp đầy sang hình vuông lớn.

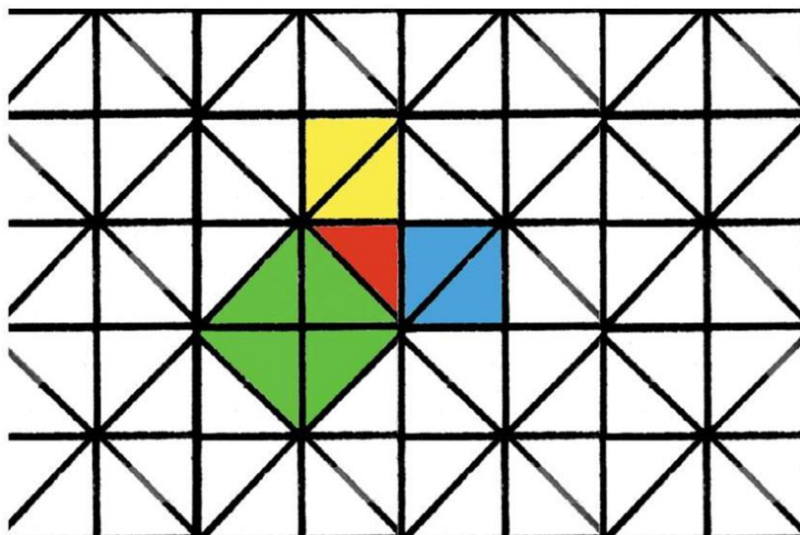
"Làm thế nào mà hình vuông có thể chia thành các mảnh nhỏ như vậy được ạ?", Jai hỏi.

Miho chỉ cho chúng một tấm áp phích khác, giải thích phương pháp phân chia.



“Tớ tự hỏi làm sao mà Pythagoras nghĩ ra được những điều đó”, Ichiro nói.

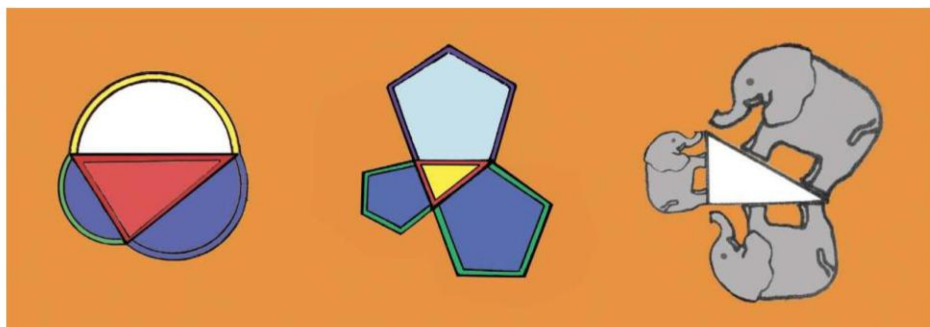
Nghe cậu bé hỏi, Miho giải thích:



“Có một câu chuyện nói rằng Pythagoras đã lấy ý tưởng từ việc quan sát các lát gạch trên sàn của một ngôi chùa. Mẫu lát gạch trông giống như sàn chúng ta đang đứng ở đây. Các em có thể tìm thấy Định lý Pythagoras giữa những gạch lát không?”.

Các cậu bé chăm chú nhìn, và chúng đã nhìn thấy “ba hoa văn hình vuông được đặt trên ba cạnh của tam giác vuông” nổi lên. Ichiro dùng tay vạch nét chúng theo dấu hoa văn trên sàn nhà.

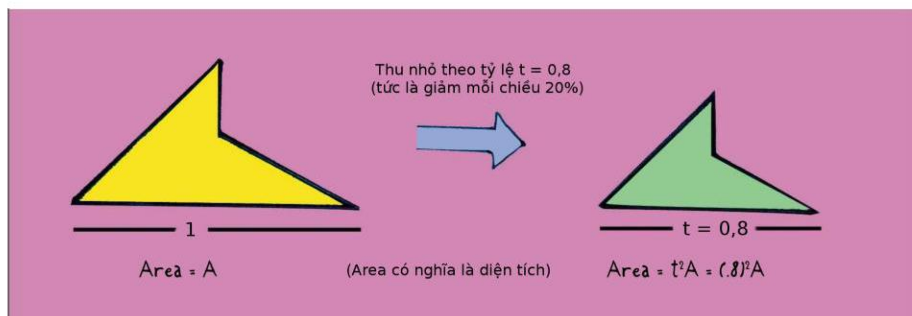
“Nè, ở góc phòng tiếp theo, hình vuông không còn được đặt trên các cạnh của tam giác vuông nữa”, Kino đã phát hiện ra và nói với hai bạn.



Khi hai cậu bé đến xem chỗ Kino vừa chỉ, và thấy trên cạnh của những tam giác vuông có đặt nửa hình tròn, hình ngũ giác, và thậm chí cả hình con voi!

Miho giải thích cho các em: “Định lý Pythagoras có thể được mở rộng ra cho các hình khác, không nhất thiết phải là hình vuông. Dù ta đặt bất kỳ những hình đồng dạng nào khớp lên ba cạnh của một tam giác vuông, thì diện tích của chúng vẫn liên quan với nhau: Diện tích của hình nhỏ cộng với diện tích của hình trung bằng diện tích của hình lớn”.

“Tại sao lại như vậy ạ?”, Jai muốn biết.

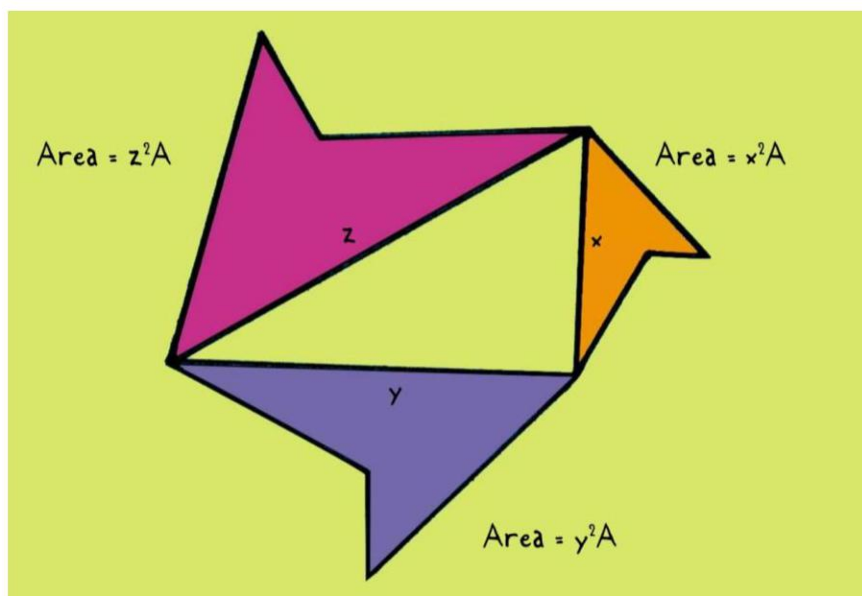


Miho dẫn ba em đến chỗ tấm bảng đen và bắt đầu giải thích.

"Các em đã bao giờ thấy cách một cái máy photocopy in một hình được thu nhỏ lại chưa?", chị ấy nói.

"Giả sử chị có một vài hình với diện tích A và chị muốn cái máy photocopy in hình nhỏ đi 20%", chị ấy viết lên bảng.

"Hình được in sẽ đồng dạng với hình gốc, nhưng theo tỷ lệ $t = 0{,}8$, và diện tích của nó bằng $t^2A = (0{,}8)^2A$", chị ấy tiếp tục. "Nếu chị muốn phóng to hình ra thì cũng tương tự như vậy".



Chị ấy viết lên bảng và tiếp tục nói.

“Nhờ phóng to, thu nhỏ, ta được các hình đồng dạng và độ dài một cạnh tương ứng của các hình lần lượt là x, y và z, được đặt trên ba cạnh của tam giác vuông”, chị ấy nói. Theo định lý Pythagoras, ta có:

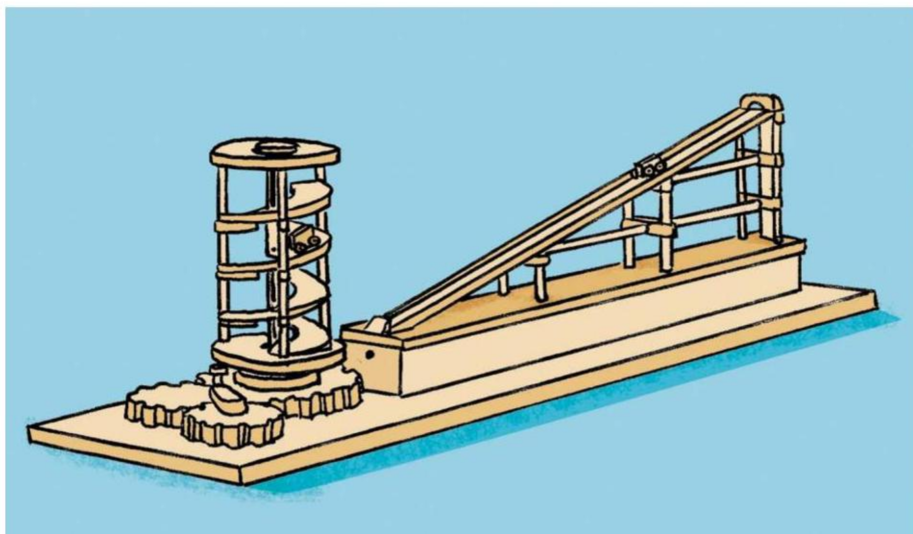
$$x^2 + y^2 = z^2$$

Vì thế:

$$x^2A + y^2A = (x^2 + y^2)A = z^2A$$

“Với công thức này, hình dạng tùy ý như thế nào cũng được, miễn là ba hình đồng dạng với nhau theo tỉ lệ ba cạnh của tam giác vuông, tổng diện tích của hình nhỏ và trung bằng sẽ diện tích hình lớn,” Jai diễn tả lại một cách ngắn gọn.

“Đúng rồi đó”, Miho nói.



Tiếp theo, các cậu bé nhìn thấy mô hình bằng gỗ khác. Có hai ô tô đồ chơi, một cái di chuyển từ trên xuống một con dốc, và cái khác thì chạy từ trên xuống một đoạn đường xoắn ốc quanh co nằm bên trong một hình trụ.

“Đó là cái gì vậy?”, Kino hỏi.

Mô hình này chỉ cho các em biết cách để đo độ dài của một đường xoắn ốc," Miho giải thích. "Hãy nhìn hai cái ô tô ở trên đỉnh của con dốc, và đỉnh của đường xoắn ốc. Chúng bắt đầu cùng lúc, chạy xuống cùng tốc độ. Vì các bộ bánh răng chuyển động đồng thời, nên các xe có thể xuống đoạn dốc có cùng khoảng cách trong cùng một khoảng thời gian".

"Chúng xuống đến phía dưới cùng lúc. Thế có nghĩa là độ dài đường xoắn ốc bằng độ dài con dốc", Ichiro kết luận.

"Đúng rồi", Miho tán thành.

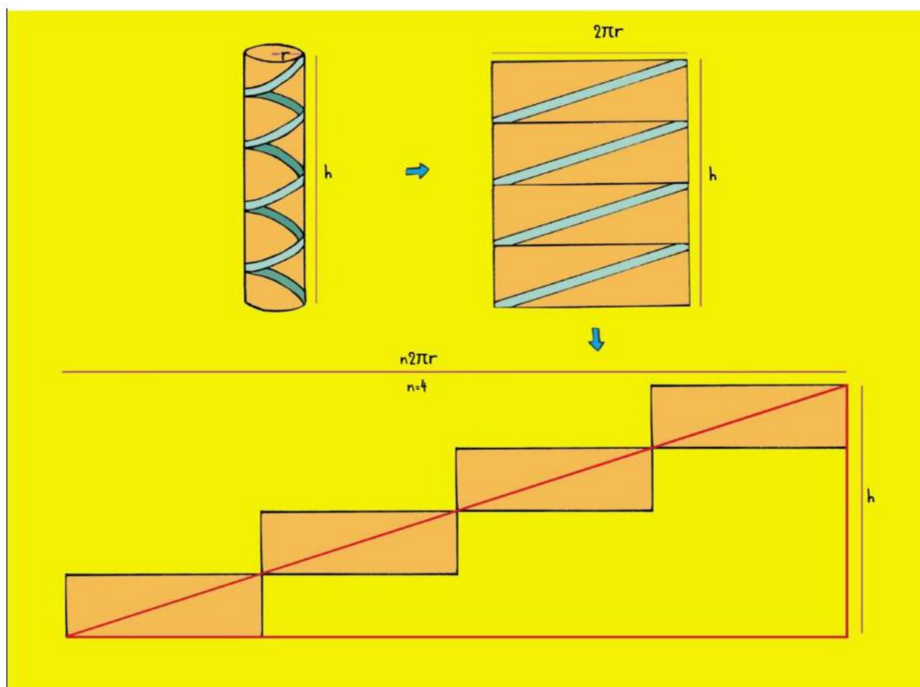
Ichiro quan sát cẩn thận sự chuyển động của các bộ bánh răng làm cho những chiếc ô tô đi lên đi xuống.

"Nhưng sao chúng lại ở đây, trong phòng của Pythagoras, chúng có liên quan gì đến Pythagoras vậy?", Kino thắc mắc.

"Trước hết, các em hình dung là cái mặt hình trụ chứa đường xoắn ốc được trải thẳng ra". Miho nói.

"Gọi đường cao hình trụ là h, bán kính mặt trụ là r. Bây giờ giả sử đường xoắn ốc vòng quanh hình trụ n lần, trong mô hình thì $n = 4$", chị ấy tiếp tục nói, và vẽ lên một cái bảng.

"Độ rộng của mỗi phần được trải thẳng ra là chu vi hình tròn của mặt trụ".



“Nếu chúng ta xếp các khúc đường xoắn ốc đã được uốn thẳng ra thành một đường chéo thì sẽ thấy độ dài của đường đường xoắn ốc cũng là độ dài đường chéo của một hình tam giác vuông có chiều cao là h và cạnh đáy là $2\pi nr$”.

“Em hiểu rồi!”. Jai reo lên, “Sau đó, từ định lý Pythagoras, ta tìm ra độ dài đường chéo của hình tam giác này bằng

$$\sqrt{(\mathrm{nr}2\pi)^2 + \mathrm{h}^2}$$

“Đúng rồi”, Miho khen ngợi sự nhanh trí đưa ra lời giải thích của Jai.

Nhưng Ichiro và Kino không ngạc nhiên lắm, vì Jai luôn hiểu mọi thứ nhanh và tốt hơn chúng.



Chương 5 Toán học trong âm nhạc

Khi đang ở trong phòng Pythagoras, bọn trẻ nghe thấy tiếng nhạc phát ra từ một nơi nào đấy. Chúng quay về hướng có tiếng nhạc, và nhìn thấy một biển hiệu:



LỐI NÀY DẪN ĐẾN PHÒNG ÂM NHẠC

Theo hướng mũi tên, chúng nhìn thấy một cái cầu thang xoắn ốc kỳ lạ. Mỗi bậc thang đều có độ dài khác nhau, và một số bậc thang được phủ thảm. Một anh hướng dẫn tên là Yasu chỉ cho bọn chúng đi xuống cầu thang lần lượt từng người một. Như thường lệ, Kino đi trước. Khi cậu bước lên một bậc của cầu thang thì một tiếng nhạc cất lên. Khi Kino chạy xuống cầu thang thì một giai điệu ngân vang.

Ichiro và Jai theo sau, nhưng chúng tò mò muốn biết điều gì xảy ra nếu Ichiro đi đằng trước còn Jai đi đằng sau cách nhau mấy bậc.

Chúng hỏi Yasu rằng có thể làm như vậy được không và anh ấy đồng ý. Chúng từ từ bước xuống và nghe thấy những nốt nhạc quyện vào với nhau. Chiếc cầu thang âm nhạc cao hai tầng nhà và khi xuống đến chân cầu thang là xuống đến tầng hầm của tòa nhà.

Ở chân cầu thang có hai tấm áp phích, một tấm nói về cầu thang còn tấm kia thì về âm nhạc và toán học.



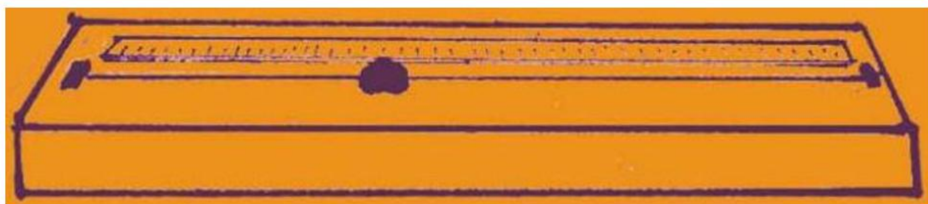
Cầu thang âm nhạc

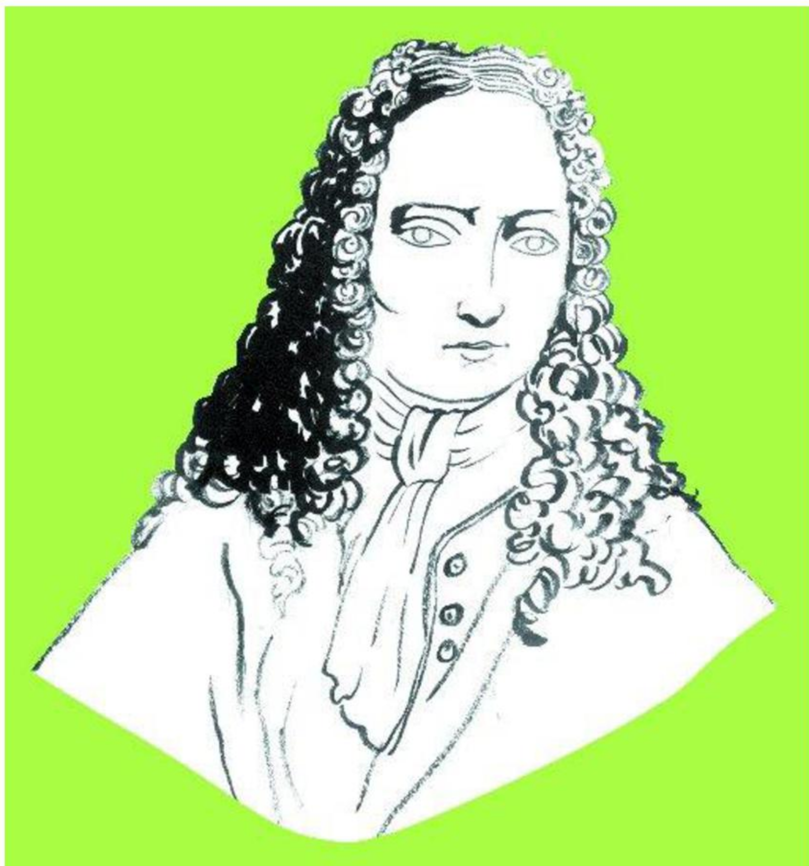


Đàn mộc cầm là một loại dụng cụ âm nhạc làm bằng các thanh gỗ cứng với độ dài tăng dần đặt trên một cái khung. Mỗi thanh gỗ cho một nốt nhạc khác nhau ứng với độ dài của nó. Đàn mộc cầm được chơi bằng hai cây vồ.

Cầu thang âm nhạc của chúng tôi cũng được làm theo nguyên tắc của đàn mộc cầm. Các bậc thang được làm bằng gỗ cứng có độ dài khác nhau để vang lên các nốt nhạc khác nhau theo nửa cung một. Khi đi xuống cầu thang, bạn nghe được một giai điệu đơn giản.

Pythagoras đã biết đến mối liên hệ giữa độ dài và âm điệu. Ông đã quan sát nhiều âm thanh cất lên từ những sợi dây có độ dài khác nhau, với độ căng khác nhau. Ông sáng chế ra một cây đàn một dây, còn gọi là monochord. Loại nhạc cụ này tạo ra các nốt nhạc khác nhau khi ấn dây đàn ở những độ dài nhất định và gảy đàn.





"Âm nhạc là thú vui mà trí óc con người trải nghiệm khi đếm mà không biết rằng mình đang đếm".

Gottfried Leibniz (1646-1716)

Leibniz và Issac Newton đều được ghi nhận là đã phát minh ra phép tính vi tích phân. Leibniz còn có nhiều đóng góp quan trọng trong các lĩnh vực khác ngoài toán học. Ông cũng là một nhà ngoại giao, nhà sử học, nhà triết học, vv... Ông thường được gọi là *"nhà bác học toàn năng cuối cùng"*.

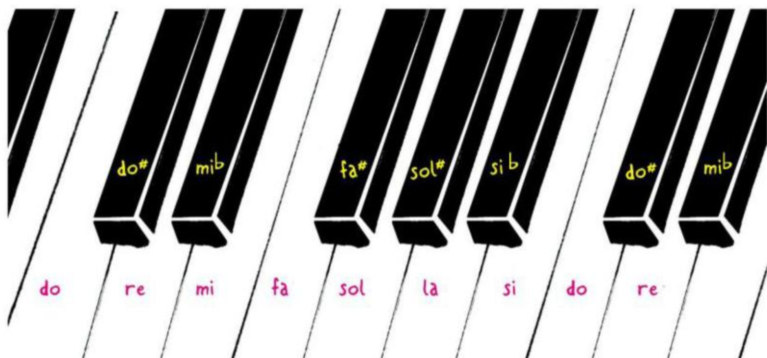
Một bên căn phòng đặt một cây đàn piano. Người hướng dẫn tên là Chie vừa chơi một đoạn nhạc trên đàn piano vừa giải thích mối liên hệ giữa các nốt.



“Bây giờ chị sẽ chơi một vài hợp âm và các em nói cho chị biết xem chúng nghe có dễ chịu hay không, nếu có thì vỗ tay nhé”, chị ấy nói.

Chie đánh đồ-rê-mi. Tất cả bọn trẻ vỗ tay.

Chị ấy chơi tiếp một loạt hợp âm. Chúng vỗ tay lần nữa khi chị chơi hợp âm đô-fa-sol và si-rê-sol, chuyển từ quãng tám thứ nhất sang quãng tám thứ hai.



Chúng ta hãy thử đặt các nốt nhạc theo thứ tự quanh một vòng tròn”, Chie nói và dẫn mọi người đến chỗ một biểu đồ. “Bây giờ, hình

dung là chúng ta chơi lại những hợp âm vừa rồi trên bàn phím hình tròn này. Các em hãy cho chị biết khoảng cách giữa ba nốt trong hợp âm theo chiều kim đồng hồ là bao nhiêu. Ví dụ như khoảng cách giữa nốt đô và nốt đô thăng là 1, giữa đô và rê là 2", Chie giải thích. Kino liền nói:

"Hợp âm đô-mi-sol có khoảng cách giữa các nốt là 4-3-5".

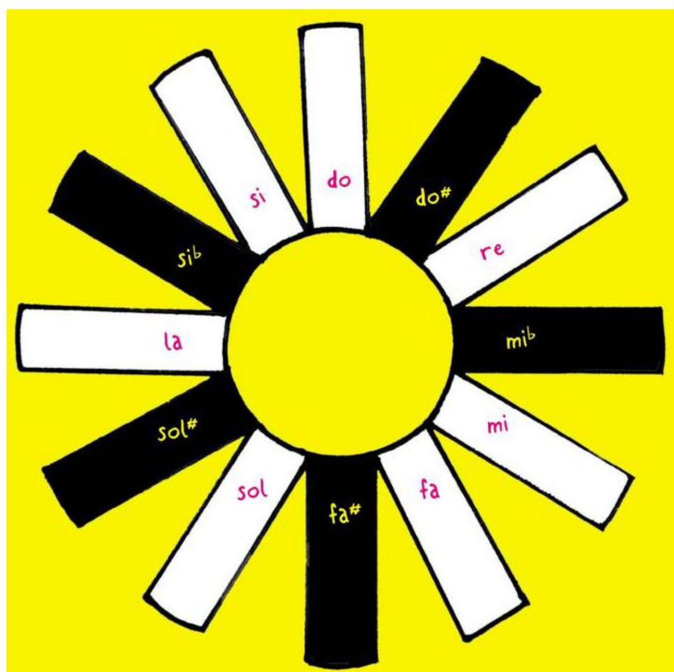
"Với hợp âm rê-fa-la là 3-4-5", một cậu bé khác nói.

"Với si-rê-sol là 3-5-4", lại một bạn khác nói.

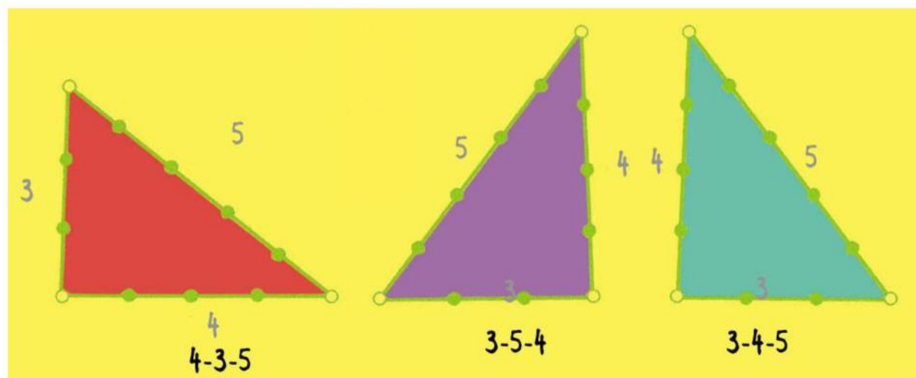
"Ba số đó gợi ý cho các em nhớ ra điều gì không?", Chie hỏi.

Jai hăng hái suy nghĩ rồi đột nhiên thốt lên:

"Bộ ba này là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông".



"Đúng rồi, bộ ba nào ở đây cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông", Chie nói và mang ra tam giác vuông có độ dài ba cạnh là 3-4-5.



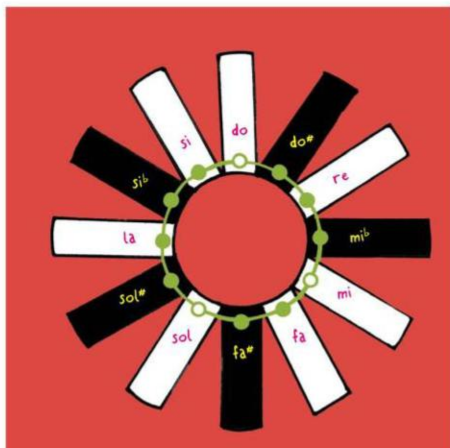
“Điều đó có nghĩa là hợp âm và định lý Pythagoras có mối liên quan với nhau?”, Kino nói to, rất ngạc nhiên về mối quan hệ kỳ lạ này.

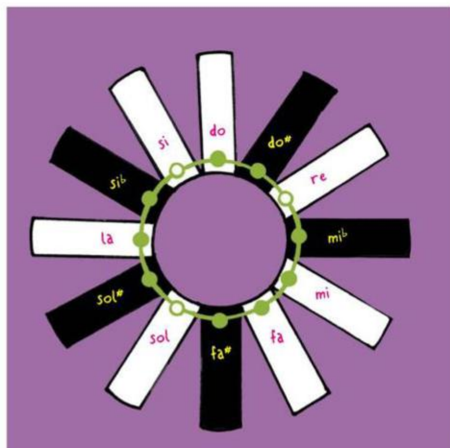
“Em nói đúng”, Chie trả lời.

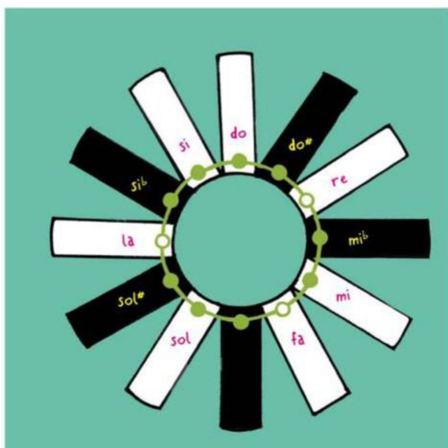
“Nếu chúng ta chơi một hợp âm có khoảng cách 4-3-5 nhưng bắt đầu từ do# thì sẽ ra sao?”, Ichiro vẫn còn hoài nghi.

“Em hãy chơi thử đi!”, Chie dẫn bọn trẻ đến chỗ cây đàn piano.

Kino chơi hợp âm do#-fa-sol# trên đàn piano. Bọn trẻ vỗ tay. Rồi chúng đứng xếp hàng trước cây đàn piano để được thử chơi với các hợp âm khác.



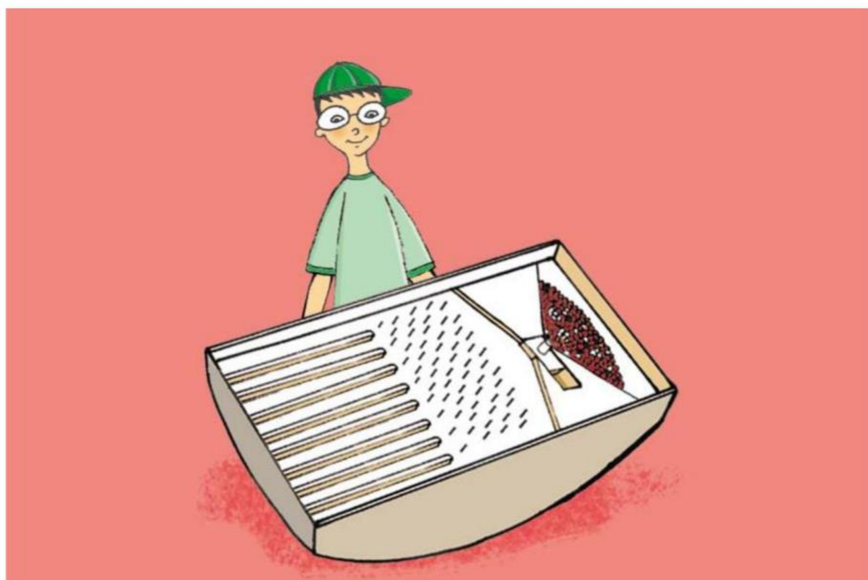




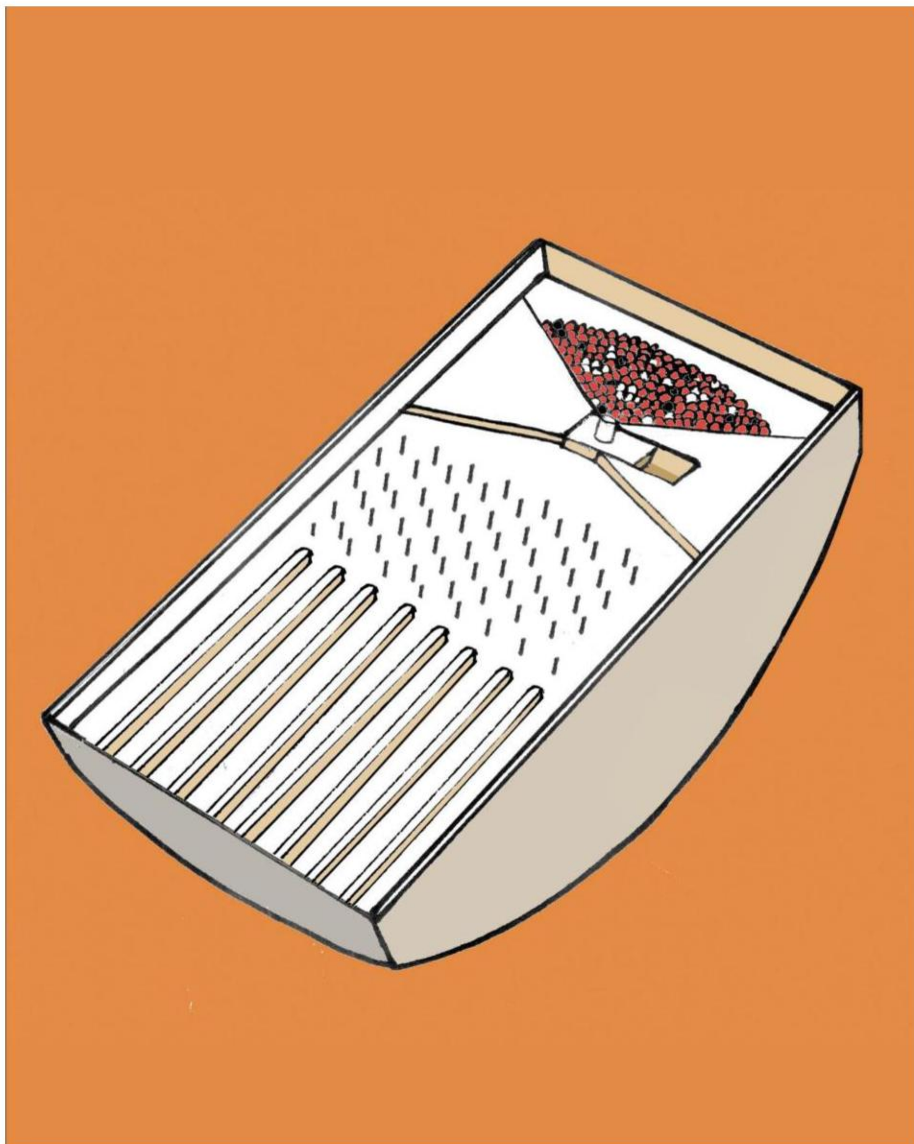
"Đúng rồi đúng rồi, thêm một hợp âm nữa", Chie nói. "Hợp âm 4-3-5 và 3-5-4 thì âm thanh rất lạc quan tươi sáng, ngược lại, hợp âm 3-4-5 thì có vẻ u buồn."

Các cậu bé đi đến chỗ có chiếc đàn chuông khổng lồ hình tròn, gõ các hợp âm 4-3-5 và 3-4-5, cả vui tươi và sầu buồn, để kiểm nghiệm lại điều chị Chie đã nói.





Chương 6 Toán học trong Pachinko



Phía bên ngoài phòng âm nhạc là một phòng trưng bày mở gồm rất nhiều trang thiết bị và mô hình gây tò mò.

Trên sàn nhà có một đồ vật lớn được làm bằng gỗ, đáy của nó giống hình cái nôi lắc lư. Một tấm ván phủ lên trên, giữa tấm có các cây đinh được đóng một cách thứ tự. Phía trên của phần đinh là một khoang có vách ngăn chứa rất nhiều hòn bi nhựa. Phía dưới các cây đinh là nhiều ngăn dọc xuống.

Các cậu bé không biết đây là cái gì. Chúng lại gần, quỳ xuống để quan sát kĩ hơn. Các cây đinh được xếp cách đều nhau trên những hàng ngang. Nếu gọi các hàng đinh theo thứ tự từ trên xuống là hàng thứ nhất, hàng thứ hai, v.v..., thì các hàng thứ nhất, thứ ba, thứ năm, v.v. xếp giống hệt nhau, còn các hàng thứ hai, thứ tư, v.v... xếp lệch đi so với hàng thứ nhất một khoảng đúng bằng một nửa khoảng cách giữa hai đinh liên tiếp.

"Trông nó giống pachinko[1] nhỉ", Kino bình luận.

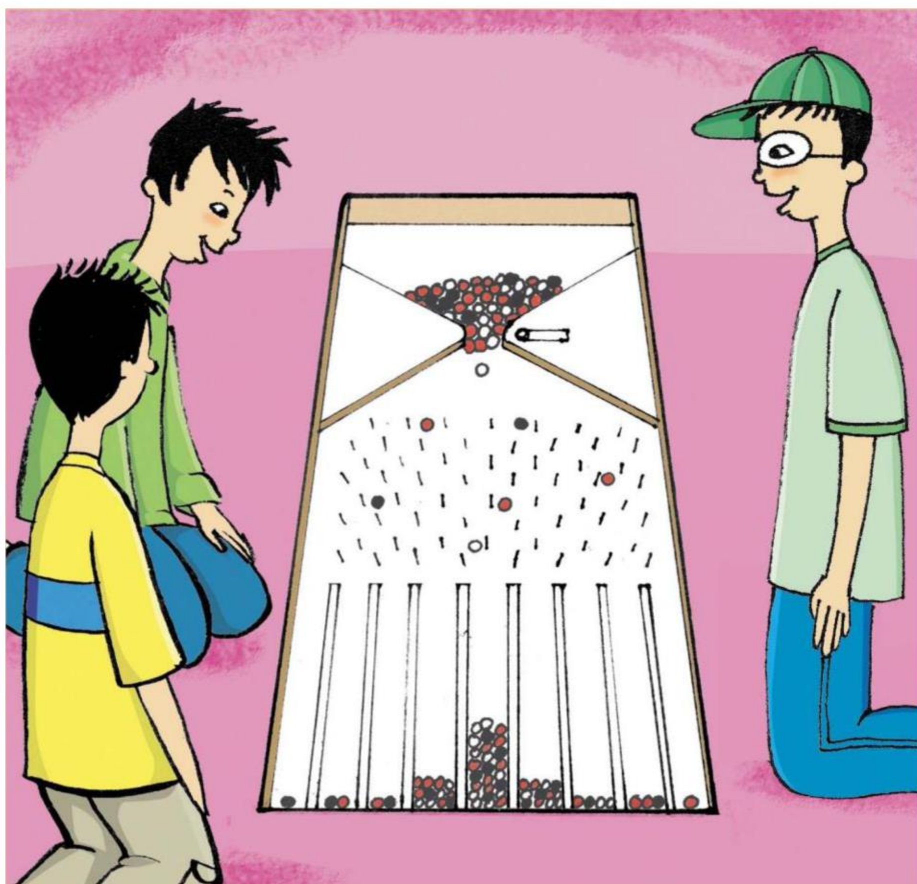
Một hướng dẫn viên tên là Norio bước lại gần bọn trẻ.

"Để cho phần khoang chứa các hòn bi được nâng cao hơn, các em hãy nghiêng dụng cụ này". Anh ấy hướng dẫn.

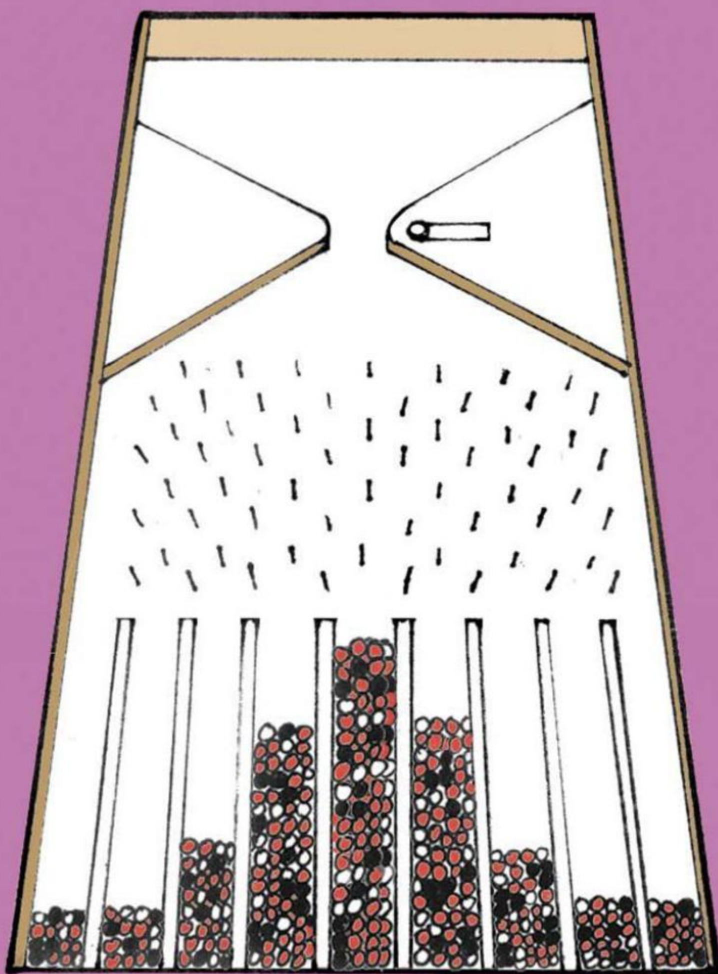
Ichiro và Jai nghiêng dụng cụ.

"Bây giờ hãy mở cửa khoang để các hòn bi rơi xuống". Norio nói tiếp.

Kino làm theo hướng dẫn của anh Norio, và bọn chúng nhìn các hòn bi rơi xuống dưới.



Ở phía dưới, các hòn bi dồn lại thành hình trông giống như ngọn núi.



Kino nghiêng dụng cụ theo chiều ngược lại cho các hòn bi trở về vị trí ban đầu. Bị kích thích tò mò, các cậu bé làm lại một lần nữa.

“Vẫn giống như hình ban đầu nhỉ”. Ichiro nói.

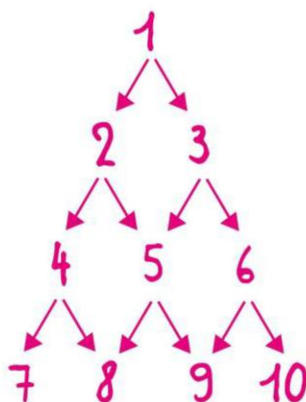
“Hình này được gọi là hình *phân phối chuẩn*”. Norio chỉ cho các cậu bé. Chúng làm lại thêm ba lần nữa, lần nào cũng ra cùng kết quả.

Trong ba lần cuối này, Jai đứng quan sát rất kỹ các viên bi. Khi một viên bi rơi xuống một cái đinh thì xác suất để nó rơi tiếp sang phía bên trái hay phía bên phải của đinh là như nhau.

“Tại sao các viên bi luôn rơi như vậy?”. Cả Kino và Ichiro đều muốn biết.

“Có phải điều này liên quan đến sự sắp xếp của các những đinh không ạ?”. Jai hỏi anh Norio.

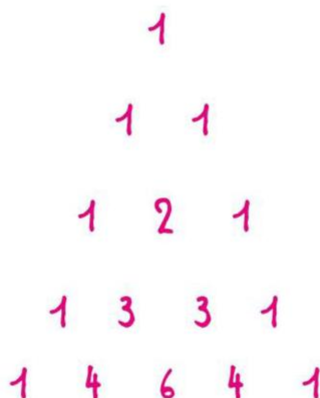
“Đúng rồi, chúng có liên quan với nhau”. Norio cảm thấy bọn trẻ rất háo hức muốn tìm hiểu. Anh dẫn chúng đến một cái bảng và cố gắng giải thích với một biểu đồ.



“Một viên bi từ cửa khoang rơi thẳng xuống đinh chính giữa. Khi nó đụng cây đinh, nó có thể rơi sang bên trái hoặc bên phải với xác suất như nhau. Ta có thể nói xác suất phân theo tỷ lệ 1:1. Khi rơi xuống, nó sẽ đụng tiếp phải một trong hai cây đinh ở hàng hai. Do đó xác suất rơi bên trái, chính giữa, bên phải của hai cây đinh ở hàng hai là 1:2:1”.

“Một cách khác để xem xét vấn đề là đếm số đường bi rơi. Có một đường bi rơi đụng đinh 2, và một đường bi khác rơi đụng đinh 3. Ở

hàng thấp hơn thì có một đường bi rơi đụng đinh 4, hai đường bi rơi đụng đinh 5, và một đường bi rơi đụng đinh 6. Nếu chúng ta tiếp tục, thì sẽ có một đường bi rơi đụng đinh 7, ba đường bi rơi đụng đinh 8, ba đường bi rơi đụng đinh 9 và một đường bi rơi đụng đinh 10. Nếu chúng ta tiếp tục với các hàng đinh thấp hơn, số đường bi rơi sẽ tăng lên xung quanh vùng giữa, do đó có nhiều khả năng để bi rơi xuống khoang giữa hơn".



Anh ấy tiếp tục viết lên bảng.

"Bây giờ, nếu anh viết số đường bi rơi theo cách này, các em sẽ thấy gì?". Norio hỏi các cậu bé.

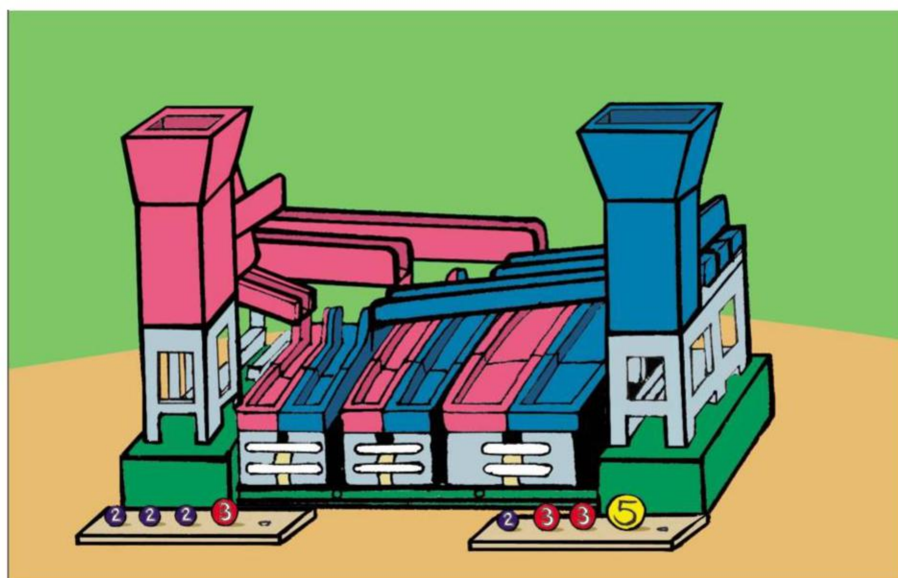
"Những con số được viết theo hình tam giác, trông quen quen. Này các cậu, chúng mình nhìn thấy nó ở đâu rồi nhỉ?". Kino cố gắng nhớ lại.

"Đó là tam giác Pascal". Ichiro trả lời.

"Các em sẽ ngạc nhiên khi thấy rằng mọi thứ trong Toán học đều có liên quan đến nhau phải không. Tam giác Pascal còn xuất hiện ở rất nhiều nơi khác nữa". Norio nói.



Chương 7 Máy ƯCLN - BCNN



"Nhìn này," Ichiro gọi hai cậu bạn. "Cái máy này sẽ tự động tính ước chung lớn nhất (ƯCLN) và bội chung nhỏ nhất (BCNN) nè".

Bọn trẻ đã được học ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất ở trường rồi, cho nên rất thích thú với cái máy này.

"Nhưng ở đây có ghi chỉ dành cho các số có các thừa số nguyên tố là 2, 3 và 5 thôi", Ichiro nói thêm và chỉ vào bảng chú ý trên bàn.

"Được thôi", Kino nói. "Chúng ta phải làm gì bây giờ?".

Chúng đọc hướng dẫn.

1) Chọn 2 số, sau đó phân tích dưới dạng tích các thừa số nguyên tố.

Chúng chọn

$$a = 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

và

$$b = 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

2) Trên bàn là những quả bóng được đánh số 2, 3, và 5. Với mỗi số, chọn những bóng đại diện cho các thừa số của nó.

3) Đặt những quả bóng đại diện cho số thứ nhất trong một cái phễu, và những quả bóng cho số thứ hai trong cái phễu còn lại.

4) Chúng làm theo hướng dẫn. Chúng nhìn thấy những trái bóng rơi xuống những khoang nối liền với những cái phễu. Khi những trái bóng đã được giữ yên, các khoang di chuyển để đạt đến trạng thái cân bằng. Lấy các quả bóng ở những khoang trên cao và nhân chúng với nhau, ta được ƯCLN. Làm tương tự với các quả bóng ở những khoang thấp hơn, ta được BCNN.

Theo chỉ dẫn của máy, chúng tìm được:

ƯCLN $= 2 \times 3 = 6$

BCNN $= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$

Chúng biết rằng các kết quả này đúng, nhưng Ichiro rất tò mò muốn biết cái máy đã làm như thế nào. Cậu bé tiến lại gần một hướng dẫn viên tên là Minoru. Anh Minoru rất sẵn lòng giải thích.

"Khi em đặt các quả bóng vào trong phễu, thì đầu tiên chúng được phân loại theo kích cỡ. Những quả bóng 2, 3, 5 lần lượt là những quả bóng nhỏ, vừa và to. Bên dưới mỗi phễu là ba lỗ khoang nhỏ, vừa, to, và kích thước của chúng phù hợp với kích thước của những quả bóng.
Những cái lỗ này được sắp xếp theo kích thước tăng dần, vì thế khi những quả bóng đi qua, chỉ những bóng nhỏ mới rơi xuống lỗ khoang nhỏ, bóng vừa và to cũng rơi tương tự như vậy. Tiếp theo, từ cùng một phễu, những bóng có cùng kích cỡ sẽ rơi xuống cùng một khoang. Ví dụ, bây giờ em kiểm tra trường hợp $b = 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$, ba quả bóng số 2 sẽ rơi xuống cùng một khoang, quả bóng số 3 thì rơi xuống khoang khác. Các quả bóng được đánh cùng số từ hai bên phễu khác nhau thì được đưa vào hai khoang nằm cạnh nhau. Ví dụ, ở đây có hai khoang cạnh nhau, một khoang chứa một quả bóng số 2 ứng với số thừa số nguyên tố 2 của a, khoang kia chứa ba quả bóng số 2 ứng với số thừa số nguyên tố 2 của b. Hai khoang này được nối vào nhau như là hai bên của một cái bập bênh. Khoang nào nhiều bóng hơn thì trĩu xuống dưới còn khoang nào ít bóng hơn thì chếch lên trên".

"À ra vậy! Như thế, những khoang trên cao sẽ chứa nhân tử chung của hai số và khi nhân chúng lại với nhau ta được ƯCLN". Ichiro kết luận, và vui mừng vì hiểu được lời giải thích của Minoru. Cậu tiếp tục:

"Và ở những khoang thấp hơn có số lớn hơn của mỗi loại thừa số nguyên tố trong các số. Nhân chúng lại với nhau ta được BCNN".

"Cái máy này làm công việc tính toán ƯCLN và BCNN cho chúng ta", Kino nói. "Chúng ta nên có những cái máy như thế này trong giờ học toán!".

Jai muốn tìm hiểu sâu hơn: "Nếu chúng ta chọn hai số có số thừa số nguyên tố cùng một loại là bằng nhau thì sao?".

"Ừ nhỉ", Ichiro hưởng ứng câu hỏi. "Giả sử chúng ta chọn

$$a = 90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

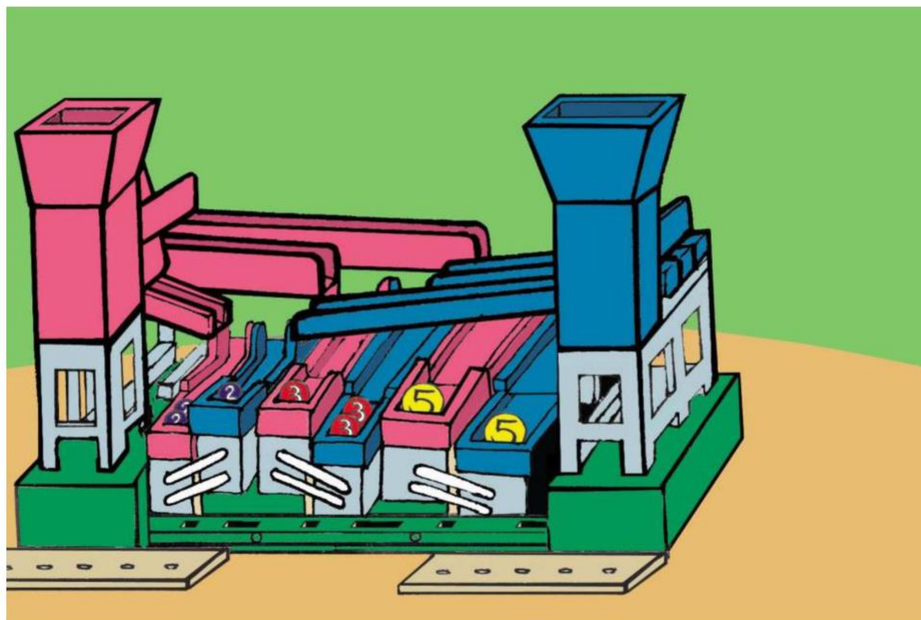
và

$$b = 60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Hai số này có cùng số thừa số nguyên tố 5”.

"Các em băn khoăn vì khi đó hai bên bập bênh bằng nhau phải không?". Minoru trả lời. "Thực ra là có một bên được làm nhẹ hơn bên kia chút xíu, để khi hai bên có cùng lượng bóng thì vẫn có một bên chếch xuống và một bên chếch lên. Vì sự chênh lệch đó nhỏ thôi nên không làm ảnh hưởng đến trường hợp mà số bóng ở hai bên khác nhau".

Quả thật, trong trường hợp a = 90, b = 60, có một bóng số 5 rơi vào một khoang màu hồng, và một bóng số 5 rơi vào một khoang màu xanh, nhưng mà khoang xanh thấp hơn khoang hồng một chút.



Vì thế

ƯCLN $= 2 \times 3 \times 5 = 30$

BCNN $= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$

Ichiro rất ấn tượng với cái máy này. Trong khi đang nhìn các quả bóng bóng đi vào các khoang, đột nhiên Ichiro nói:

“Bây giờ tớ đã hiểu được ý nghĩa của công thức

$$a \times b = \text{ƯCLN} \times \text{BCNN}$$

mà chúng ta đã học ở trên lớp”.

“Vì sao lại thế?”, Kino hỏi.

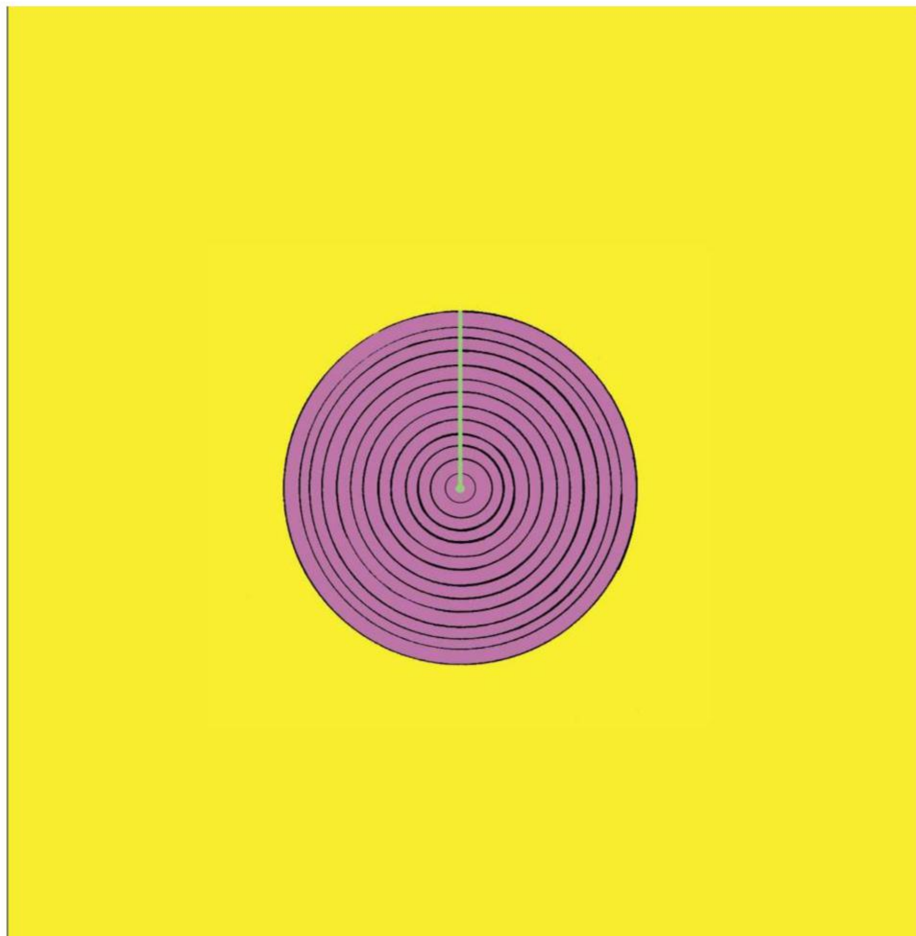
“Đây nè, tất cả bóng chúng ta đặt vào các phễu, hoặc là nằm trong ƯCLN hoặc là trong BCNN, khi nhân UCLN và BCNN với nhau, ta sẽ nhận được tích của hai số đó”, Ichiro giải thích.

Minoru rất vui vì cái máy đã giúp cho các cậu bé hiểu được bài học.

Chúng nói lời cảm ơn anh Minoru, và nhìn xung quanh để tìm điểm đến tiếp theo.



Chương 8 Baumkuchen, spaghetti và dưa hấu



Có rất nhiều đồ vật trưng bày trong phòng. Một cái bàn được ghi:

DIỆN TÍCH CỦA HÌNH TRÒN

Trên đó là một vật trông giống như chiếc bánh hình tròn được tạo thành từ các lớp vòng tròn.

"*Baumkuchen*"[1], Kino nói.

Thực ra thì mô hình hình tròn này được làm từ nhiều dải băng dán velcro.

Một chị hướng dẫn viên tên là Kyoko tiến đến gần bọn trẻ và hỏi: “Các em biết tìm diện tích của một hình tròn không?”.

“Không ạ”, chúng trả lời.

“Phần này chúng em chưa được học ở trên lớp”. Kino giải thích.

“Thế còn diện tích hình tam giác thì sao?”.

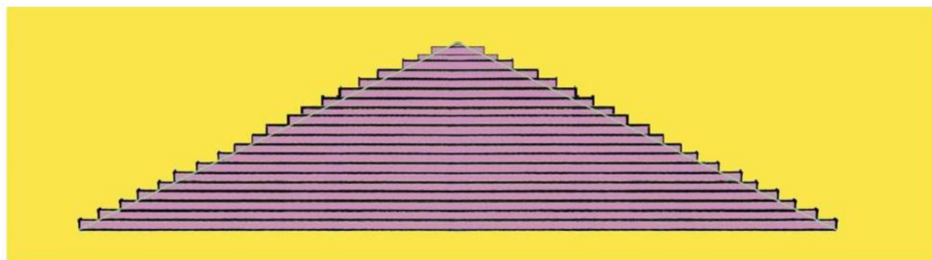
“Chúng em vừa mới học thôi ạ”. Ichiro nghe lơ đãng, nhưng vẫn nói ra một cách trôi chảy.

$\frac{1}{2} \times$ đáy $\times$ chiều cao

“Đúng vậy”, Kyoko nói. "Có một chiến lược tốt, đó là quy những điều chưa biết về những điều đã biết".

“Bây giờ chúng ta sẽ biến hình tròn thành hình tam giác”. Kyoko nói. Chị ấy cắt baumkuchen dọc theo một bán kính, và trải thẳng ra thành một hình trông giống như hình tam giác.

“Diện tích của hình tròn chính là diện tích hình tam giác này”.



“Cạnh đáy của tam giác này bằng bao nhiêu?”, Kyoko hỏi.

“Đấy là chu vi của hình tròn. Nhưng mà bọn em cũng chưa được học công thức tính nó”. Jai trả lời.

“Chị sẽ chỉ cho các em”. Kyoto nói và bắt đầu giảng giải. “Chu vi của một hình tròn bán kính r là $2\pi r$, trong đó π là một số đặc biệt có giá trị xấp xỉ 3,14”.

Ichiro thử tính: "Đường cao của tam giác là bán kính của đường tròn, và cạnh đáy là $2\pi r$, suy ra diện tích hình tam giác là

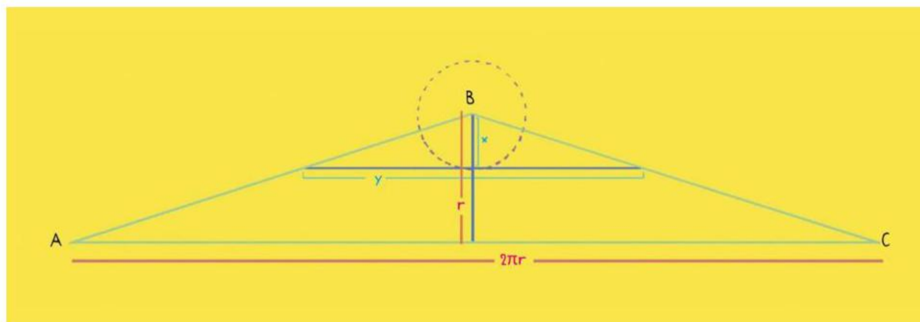
$\frac{1}{2} \times 2\pi r \times r = \pi r^2$.

"Tuyệt vời! Chị hy vọng các em sẽ không quên công thức này, vì các em đã tự tìm ra nó". Kyoko nói với ba cậu bé.

Nhưng Jai vẫn chưa hoàn toàn bị thuyết phục.

"Hình này trông giống như một tam giác, nhưng các cạnh của nó lồi lõm, diện tích của nó có bị khác đi so với diện tích hình tam giác không ạ?". Cậu ấy hỏi.

"Ở mô hình này các lớp vòng tròn hơi dày. Nhưng các em thử hình dung là chúng được làm mỏng như những tờ giấy vậy". Kyoko trả lời và dẫn bọn trẻ đến một cái bảng và vẽ biểu đồ để giải thích.

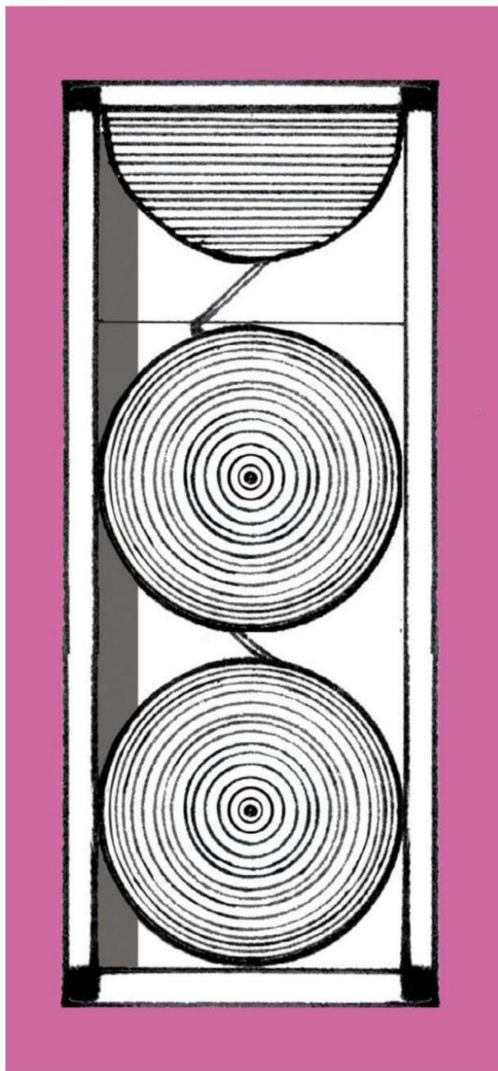


Hình tròn được cắt và mở trải ra, cho ta một tam giác ABC. Như đã nói lúc nãy, cạnh AC của tam giác có độ dài $2\pi r$.

B là tâm của đường tròn. Bây giờ, cắt và mở vòng tròn tâm B, bán kính x ($x \leq r$), thành đường thẳng có độ dài $2\pi x$. Khi đó, tỉ số giữa x và y, $x : y = 1 : 2\pi$ là hằng số. Tức là tam giác có cạnh y, đường cao x và tam giác ABC là đồng dạng". Chị ấy tiếp tục. Vì x thay đổi liên tục từ 0 đến r, nên y cũng thay đổi liên tục theo. Do đó, khi các lớp vòng tròn mỏng dính thì không còn cạnh lởm chởm, dích dắc trên AB và BC nữa".

Jai gật đầu tỏ vẻ đã hiểu.

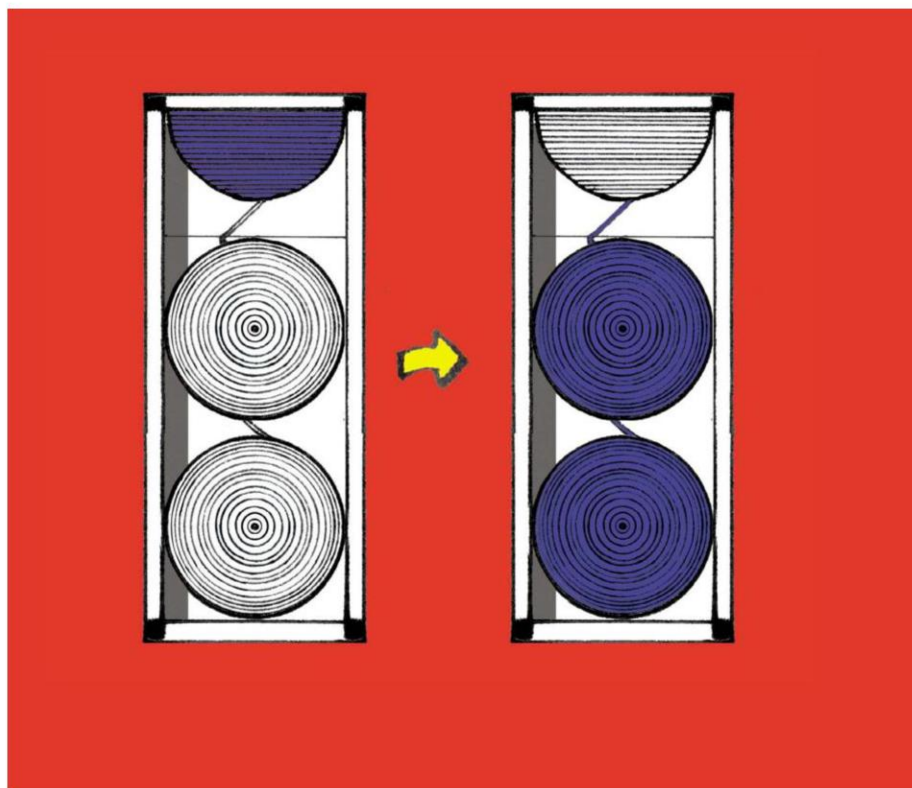
Trên một cái bàn khác, có một mô hình gồm một nửa hình cầu và hai hình tròn, được quấn quanh bởi cùng một ống dây nhựa dài. Hình cầu và hai hình tròn có cùng bán kính.



Trên bàn đó được viết:

DIỆN TÍCH BỀ MẶT CỦA MỘT HÌNH CẦU

“Ở đây chúng ta có một cái bát và hai đĩa spaghetti[2] nè”. Kino nói đùa.



Kyoko đổ dung dịch nước màu xanh vào ống nhựa, khi toàn bộ bề mặt của nửa hình cầu chứa đầy nước xanh thì dừng lại. Sau đó, chị ấy mở nút cho dung dịch ở phần ống trên bề mặt của nửa hình cầu chảy xuống hai hình tròn. Khi bề mặt của nửa hình cầu trở nên trống không thì cũng là lúc dung dịch màu xanh lấp đầy vừa khít hai hình tròn.

Jai nhận thấy rằng dụng cụ này cũng tương tự như một trong các dụng cụ minh họa định lý Pythagoras. "Để em đoán nhé". Cậu xung phong.

"Diện tích bề mặt nửa hình cầu = 2 × diện tích hình tròn"

"Đúng rồi, khi mà chúng có cùng bán kính. Rồi sao nữa?". Kyoko gợi mở từng bước.

"Vì vậy,

Diện tích bề mặt hình cầu = 2 × 2 × diện tích hình tròn

= $4\pi r^2$.

Ở bàn tiếp theo có ghi:

THỂ TÍCH HÌNH CẦU

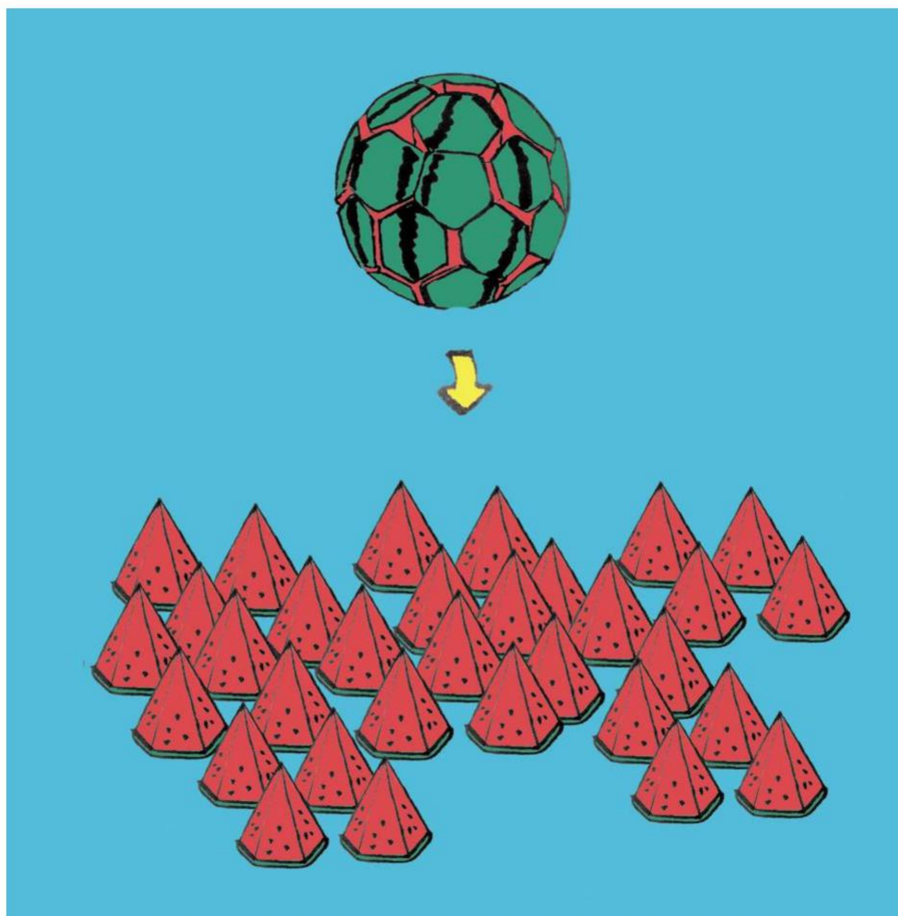
Ở đó có mẫu hình cầu bằng gỗ được vẽ trông như quả dưa hấu.

Ichiro nhận thấy mô hình quả dưa hấu này có thể tách thành nhiều hình giống như hình nón.

"Giống như cắt thành từng miếng cho dễ ăn vậy nhỉ", Kino nói.

Ichiro và Jai thì vừa nhìn vừa suy nghĩ kỹ càng về mô hình đó.

"Nghĩa là thể tích của quả dưa hấu bằng tổng thể tích của các miếng hình chóp".



“Em đã hiểu rồi đó”, Kyoko khuyến khích.

“Toàn bộ quả dưa hấu là hình cầu, cho nên từng lát miếng được xem như là hình chóp với chiều cao bằng bán kính hình cầu”, Jai nói tiếp theo lời chị Kyoko. “Nhưng đến đây tụi em cần chị giúp lần nữa. Công thức thể tích hình chóp tụi em chưa được học ạ”.

"Thể tích hình chóp = $\frac{1}{3} \times$ diện tích mặt đáy × chiều cao", Kyoko giảng giải.

Vừa nghe xong, Ichiro đáp:

"Trong trường hợp này, vì chiều cao của hình chóp là r, cho nên

Thể tích hình cầu = $\frac{1}{3} \times$ (tổng diện tích đáy của các hình chóp) $\times r$.

Nhưng tổng diện tích đáy của toàn bộ các hình chóp chính là diện tích bề mặt của hình cầu..."

Ichiro nói đến đây thì Jai tiếp tục:

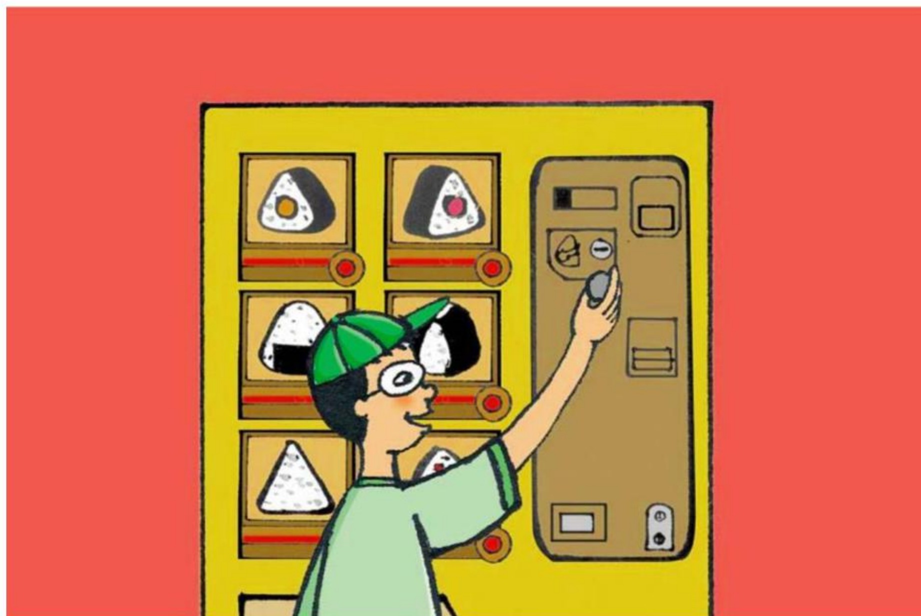
"Ở dụng cụ lúc nãy, chúng ta vừa mới học công thức tính diện tích bề mặt của hình cầu là $4\pi r^2$, áp dụng vào ta được:

Thể tích hình cầu = $\frac{1}{3} \times 4\pi r^2 \times r = \frac{4}{3}\pi r^3$".

Ichiro và Jai đã có thể tự mình rút ra được công thức, nên vô cùng vui sướng.

Mặc dù Kino không góp phần trong quá trình tìm ra công thức, nhưng vì nghe hai bạn giải thích, nên cũng hiểu được cách rút ra công thức.

"Baumkuchen, spagheti, dưa hấu... toàn là đồ ăn nên làm mình đói bụng rồi, chúng ta đi ăn trưa thôi", Kino đề nghị.



Chương 9 Máy bán hàng tự động



Các cậu bé rất đói bụng nhưng chúng không muốn mất nhiều thời gian cho bữa trưa.

"Chúng ta hãy ăn trưa nhanh để còn có nhiều thời gian tham quan", Ichiro đề nghị.

"Có nơi nào chúng em có thể ăn không vậy anh?", ba cậu bé hỏi anh hướng dẫn viên đi ngang qua.

"Ở đằng kia có đó", anh ấy chỉ một nơi được gọi là:

PHÒNG MÁY BÁN HÀNG TỰ ĐỘNG

"Đói bụng quá đi", "Ừ, đúng rồi", "Mau mau đi ăn thôi", ba cậu bé quay lại nhìn nhau rồi cười.

Ba cậu bé đi vào phòng, chỉ nhìn thấy toàn các máy bán hàng, và dần dần hiểu ra tại sao nơi này lại có tên gọi như vậy.

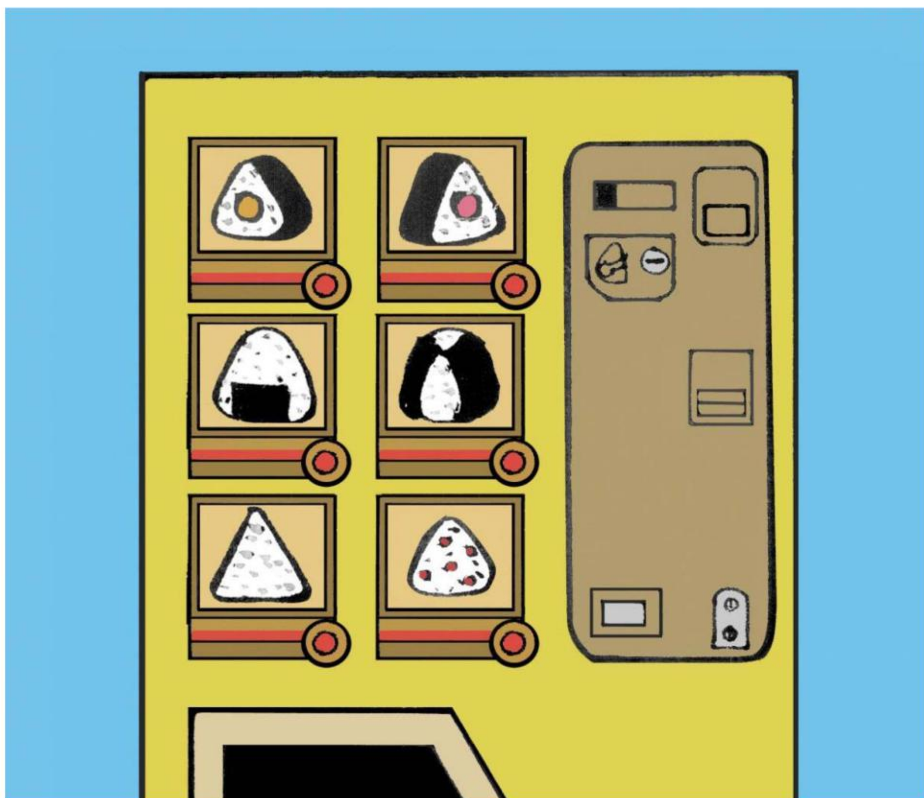
Một người đến sau nói với bọn trẻ, đầu tiên hãy mua đồng tiền của máy bán hàng tự động. Nhìn đồng tiền, ba cậu bé cười ngạc nhiên.

“Đồng tiền này có hình dạng của hình có độ rộng không đổi nè”. Ichiro nói.

Khi cho đồng tiền vào máy bán hàng tự động, nó sẽ rơi xuống dưới thông qua đường ống bên trong máy mà chúng có thể nhìn thấy.

“Tại sao người ta lại làm đồng tiền hình dạng này nhỉ?”. Kino thắc mắc.

“Cái đó thì, nếu lắp đặt một đường ống có độ rộng không đổi nằm bên trong máy, để giống với đồng tiền hình tròn là hình có độ rộng không đổi thông thường, dù hướng lăn như thế nào, thì nó cũng sẽ không bị mắc kẹt”. Jai giải thích.



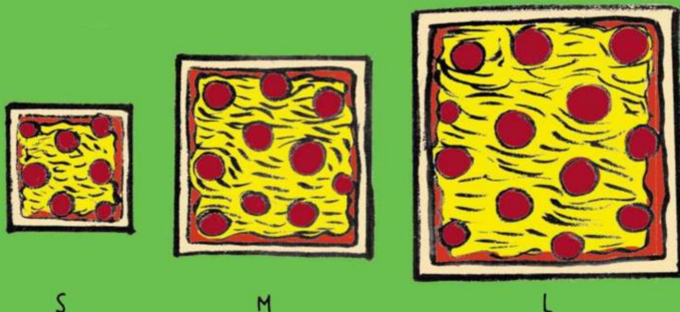
Chúng nhìn thấy onigiri[1] được bán trong một máy tự động.

“Hình tam giác mập kìa!”, ba cậu bé reo lên.

Chúng mua bánh mì kẹp thịt với đồ uống, và đến chỗ ngồi ăn. Đối diện chỗ chúng ngồi là những tấm áp phích treo trên tường, mỗi tấm ghi một bài toán liên quan đến đồ ăn.

Trong lúc ăn trưa, chúng bắt đầu thảo luận về bài toán đầu tiên, và vẽ hình lên trên khăn giấy.

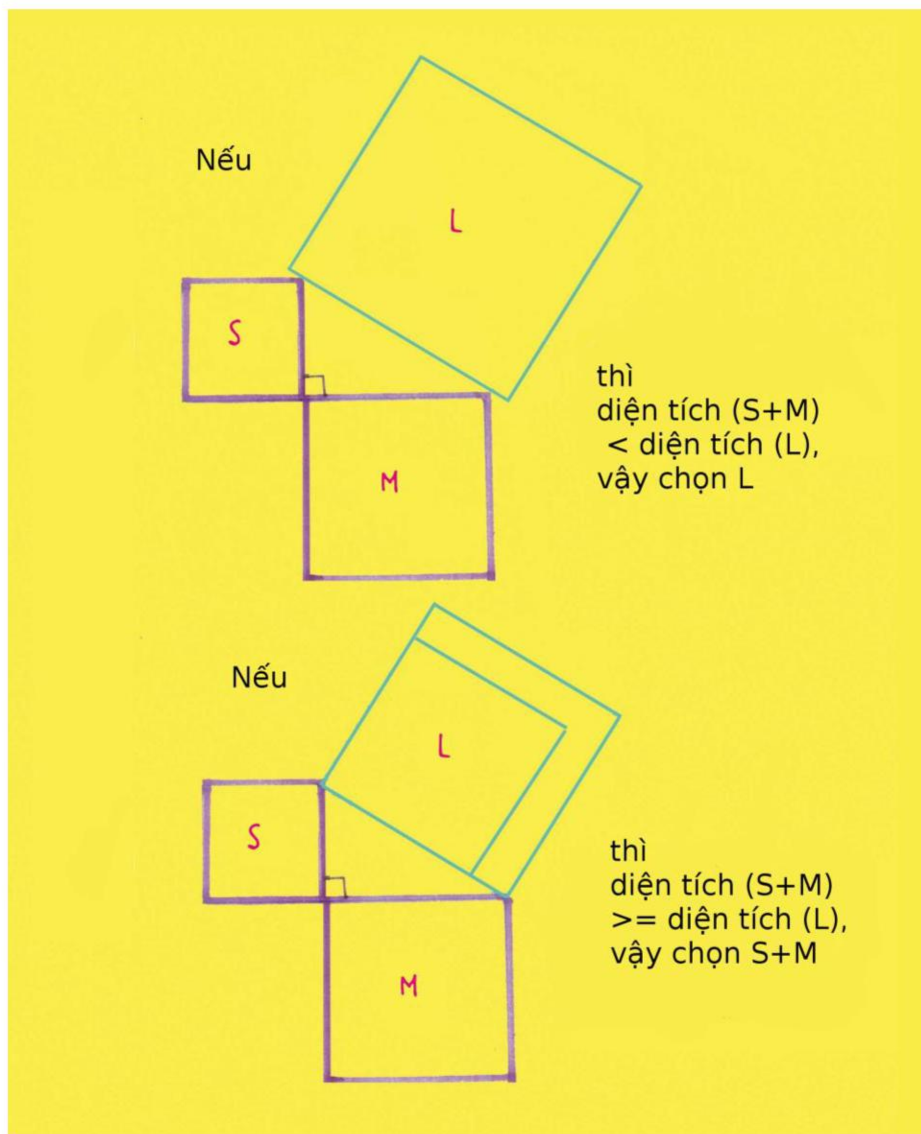
Có ba cái bánh piza hình vuông cỡ nhỏ (S), vừa (M) và lớn (L). Giá tiền pizza cỡ L bằng tổng giá tiền của hai pizza cỡ S và M. Khi bạn đói và muốn ăn nhiều, và phải chọn giữa pizza cỡ L và hai pizza cỡ S và M, thì bạn chọn bên nào?



"Ba hình vuông này làm tớ nhớ tới Định lý Pythagoras". Khi Kino nói vậy, Ichiro đáp:

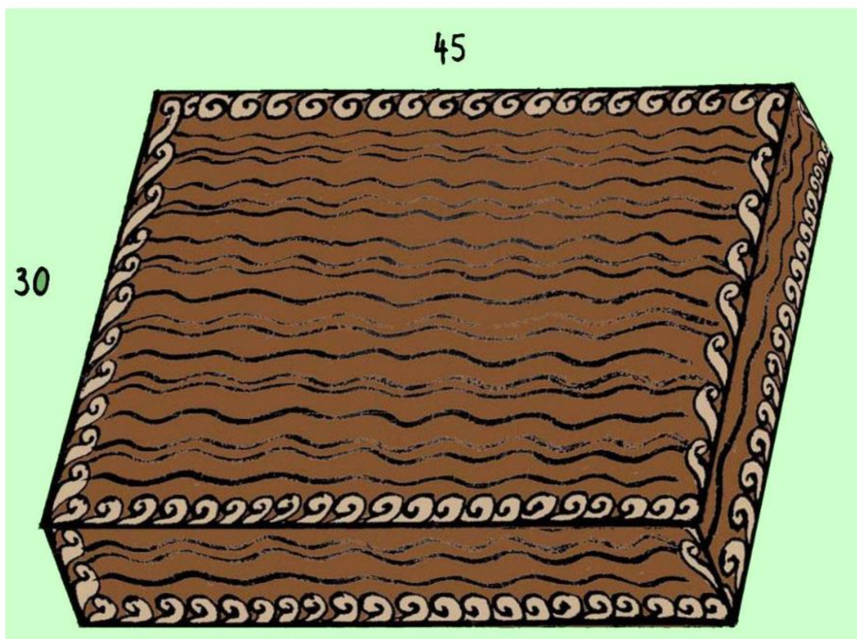
"Tớ cũng nghĩ giống cậu. Chúng ta thử đặt ba hình vuông cỡ S, M, L lên ba cạnh của một tam giác vuông xem có khớp không?"

Dựa trên ý tưởng của Ichiro, ba cậu bé phân tích như sau:



Mặc dù có những bài toán khác trên tường, nhưng bọn trẻ chọn bài toán trên tấm áp phích sau.

Bài toán cắt bánh



Một cái bánh ga-tô hình chữ nhật có chiều rộng là 30 và chiều dài là 45 (cm). Nó được phủ kem ở phía trên và ở bốn mặt xung quanh. Hãy cắt bánh bằng các nhát cắt thẳng đứng thành ba phần có bề mặt hình tứ giác, sao cho chúng có thể tích bằng nhau và diện tích được phủ kem ở ba phần cũng bằng nhau.

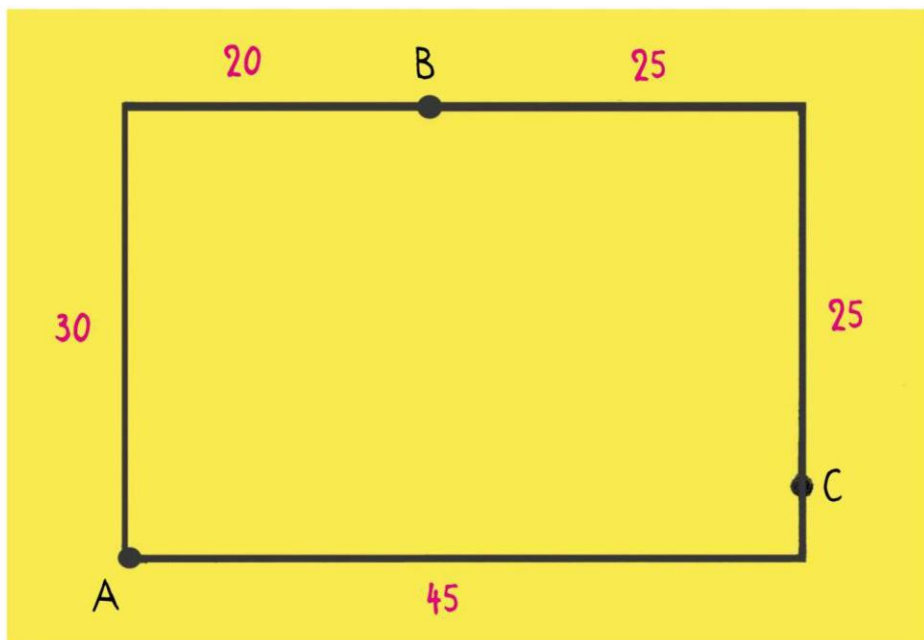
"Có vẻ là bài toán sẽ trở nên dễ hơn nếu đầu tiên chúng ta chia ba diện tích phủ kem đã". Jai đề xuất. Điều này có nghĩa là chia chu vi hình chữ nhật thành ba phần bằng nhau phải không?".

Ba cậu bắt đầu tính toán.

Độ dài chu vi bằng $2 \times 45 + 2 \times 30 = 150$.

Do đó chu vi mỗi phần sẽ là $150:3 = 50$.

Lấy một đỉnh của hình chữ nhật làm điểm bắt đầu A, chúng chia hình chữ nhật thành ba phần AB, BC, CA mỗi phần dài 50.

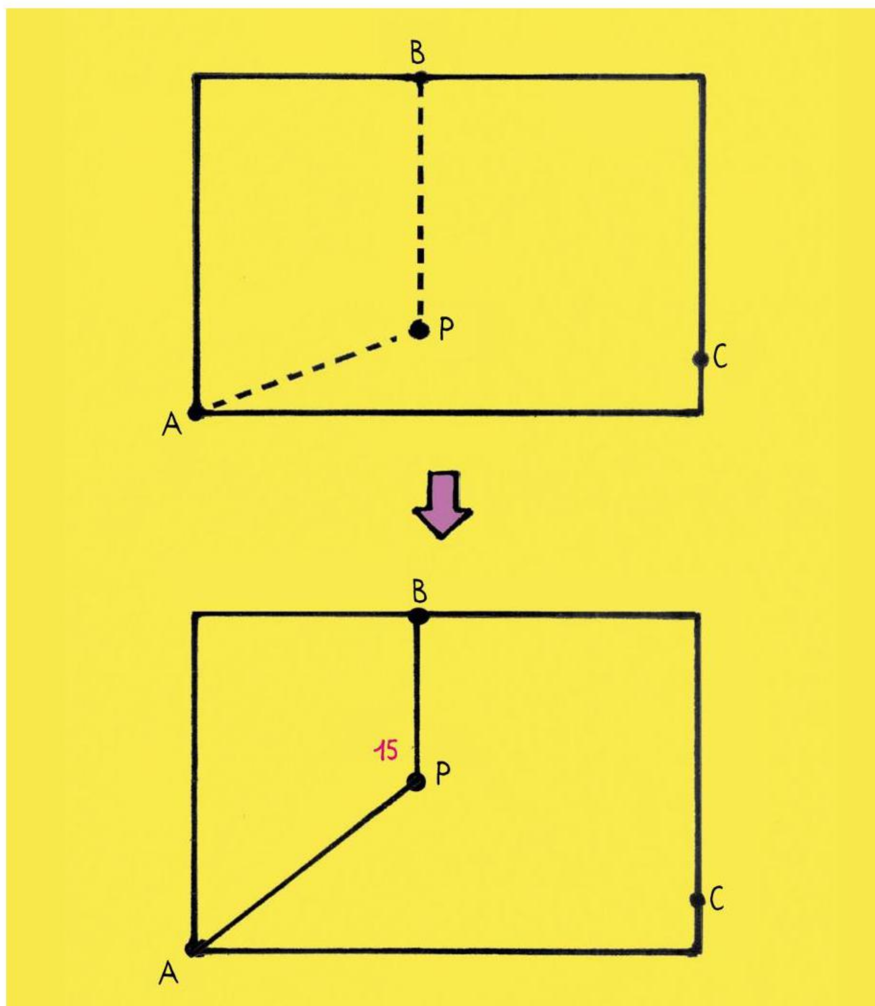


“Diện tích hình chữ nhật là $30 \times 45 = 1350$. Ichiro tiếp tục. Ba phần bánh có thể tích bằng nhau, tức là chúng có diện tích bề mặt bằng nhau. Vậy diện tích của mỗi phần là $1350 : 3 = 450$”.

“Chúng ta biết rằng để nhận được phần kem như nhau, một phần phải chứa phần chu vi từ B đến C, phần khác chứa từ C đến A, và phần còn lại chứa từ A đến B”. Kino nói.

“Làm thế nào chúng ta tìm được một tứ giác chứa chu vi từ A đến B?”. Ichiro hỏi.

“Hai cạnh còn lại ở bên trong hình chữ nhật”. Jai đáp và đăm chiêu suy nghĩ. “Với loại hình tứ giác nào thì dễ tìm diện tích nhỉ?”. Cậu ấy nói.



"Hình thang chẳng hạn". Ichiro trả lời.

"Vậy chúng ta thử tìm hình thang". Jai nói.

Cậu vẽ thêm vào biểu đồ và nói: "Chúng ta sẽ tìm điểm P sao cho diện tích của tứ giác là 450".

"Ừ, sử dụng công thức tính diện tích của hình thang đi". Ichiro đề nghị. "Đáy lớn b_1 cộng với đáy nhỏ b_2, nhân với chiều cao h rồi chia đôi:

$$\frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = 450,$$

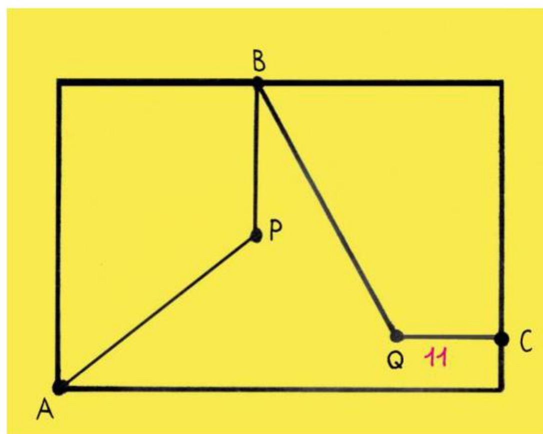
hay là:

$$\frac{1}{2}(30 + b_2)20 = 450".$$

Chúng giải phương trình và tìm được $b_2 = 15$. Ichiro điều chỉnh bên trong hình chữ nhật để tìm đúng vị trí điểm P.

"Chúng ta có thể làm tương tự để tìm được hình thang mà trên chu vi chứa phần từ B đến C". Jai đề xuất.

Các cậu bé sử dụng phương trình $\frac{1}{2}(25 + b_2)25 = 450$ và tìm được $b_2 = 11$. Chúng vẽ thêm vào biểu đồ.



"Bây giờ chúng ta đã chia được thành ba phần, với lượng bánh và lượng kem bằng nhau, nhưng phần thứ ba lại không phải là hình tứ giác". Ichiro nói với giọng nản.

Bọn trẻ không biết làm thế nào để giải được và định bỏ cuộc, nhưng Kino nhìn thấy một trong những hướng dẫn viên ở chỗ máy bán hàng tự động.

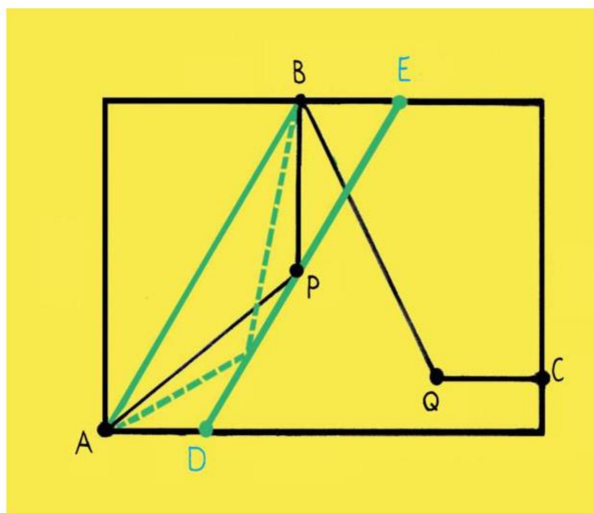
"Có lẽ chúng ta nhờ hướng dẫn viên giúp vậy". Cậu ấy nói.

Kino đi đến chỗ hướng dẫn viên. Anh ấy quay lại cùng với Kino, và họ cùng nhau giải bài toán.

"Anh là Yasu", anh ấy nói. "Đây không phải là bài toán dễ". Anh ấy tiếp tục với giọng đầy thiện cảm, và bắt đầu giải thích. "Các em cần kẻ một đường thẳng từ A đến B, rồi xét những tam giác có cạnh đáy cố định AB có chiều cao bằng chiều cao của tam giác APB. Những tam giác như vậy cũng có cùng diện tích với ΔAPB".

Anh ấy kẻ đoạn thẳng AB, và đoạn thẳng DE song song với AB, đi qua P như trên hình vẽ.

"Các em có thể di chuyển điểm P đến bất kì vị trí nào trên đoạn DE, và luôn nhận được một tam giác có cùng diện tích với ΔAPB, do đó các em có thể thay thế ΔAPB bởi một tam giác khác". Yasu tiếp tục.



"Bây giờ làm điều tương tự với hình thang khác". Anh ấy hướng dẫn.

Ichiro kẻ đoạn thẳng BC, và đoạn thẳng FG song song với BC, đi qua Q.

"A ha, có di chuyển P dọc theo DE, và Q dọc theo FG, mà vẫn giữ nguyên diện tích của hai hình tứ giác". Jai nhận xét.

Ichiro reo to: "Tớ hiểu rồi!", và cậu tiếp tục giải thích.

"Chúng ta có thể di chuyển P và Q đến giao điểm R của DE và FG. Bằng cách đó, phần thứ ba cũng là một tứ giác."

Bài toán khó đã được giải, ba cậu bé vui mừng cười hết cỡ. Yasu cũng rất vui khi thấy như vậy. "Cừ lắm!". Yasu khen ngợi các em.

"Đây là cái người ta gọi là một bữa ăn trưa công việc". Kino nói hài hước.

Jai thì chép lại những bài toán khác trên một trong những tấm áp phích. Cậu bé dự định sẽ giải chúng khi về nhà.

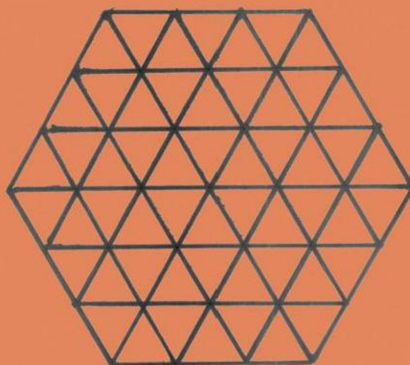
Bữa ăn trưa kéo dài hơn bọn trẻ nghĩ.

"Chúng ta đến phòng tiếp theo thôi". Ichiro nói.

Calisson là một loại kẹo Pháp có hình giống hai tam giác đều ghép vào nhau theo một cạnh chung



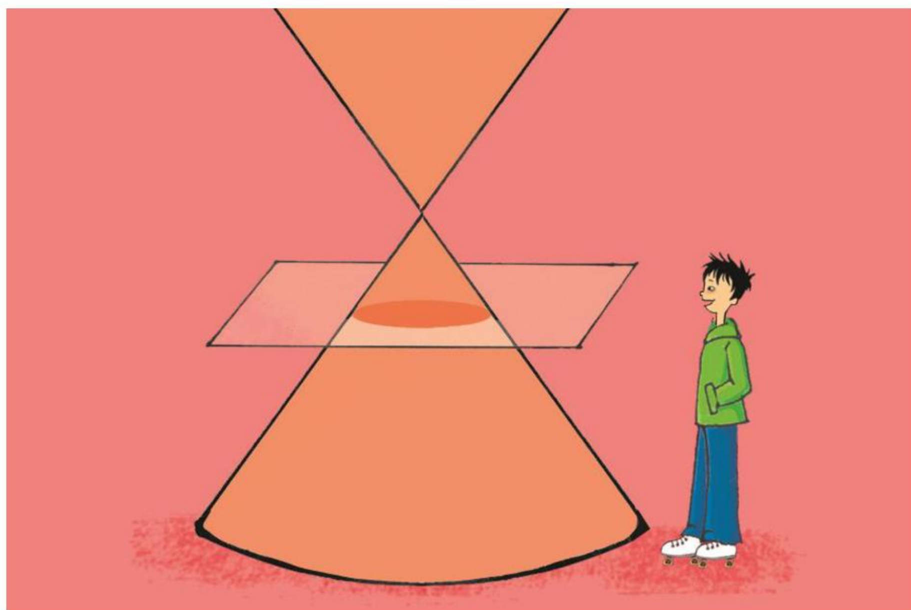
Hãy xếp các viên kẹo calisson có độ dài cạnh bằng 1 vào một hộp kẹo hình lục giác đều có độ dài cạnh là 3 sao cho kín hộp kẹo



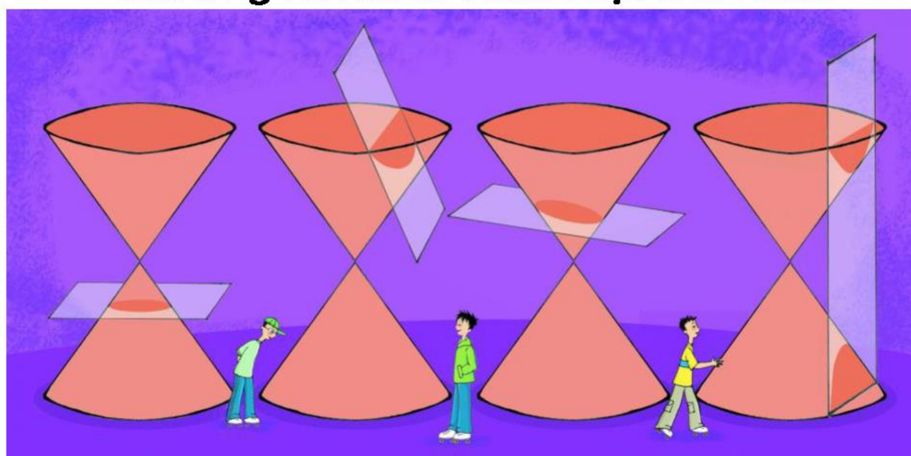
Chỉ có ba hướng đặt kẹo calisson khác nhau



nhưng có nhiều cách xếp kẹo khác nhau. Hãy tìm tất cả các cách xếp, và quan sát xem trong mỗi cách thì số kẹo được xếp theo mỗi hướng là bao nhiêu.



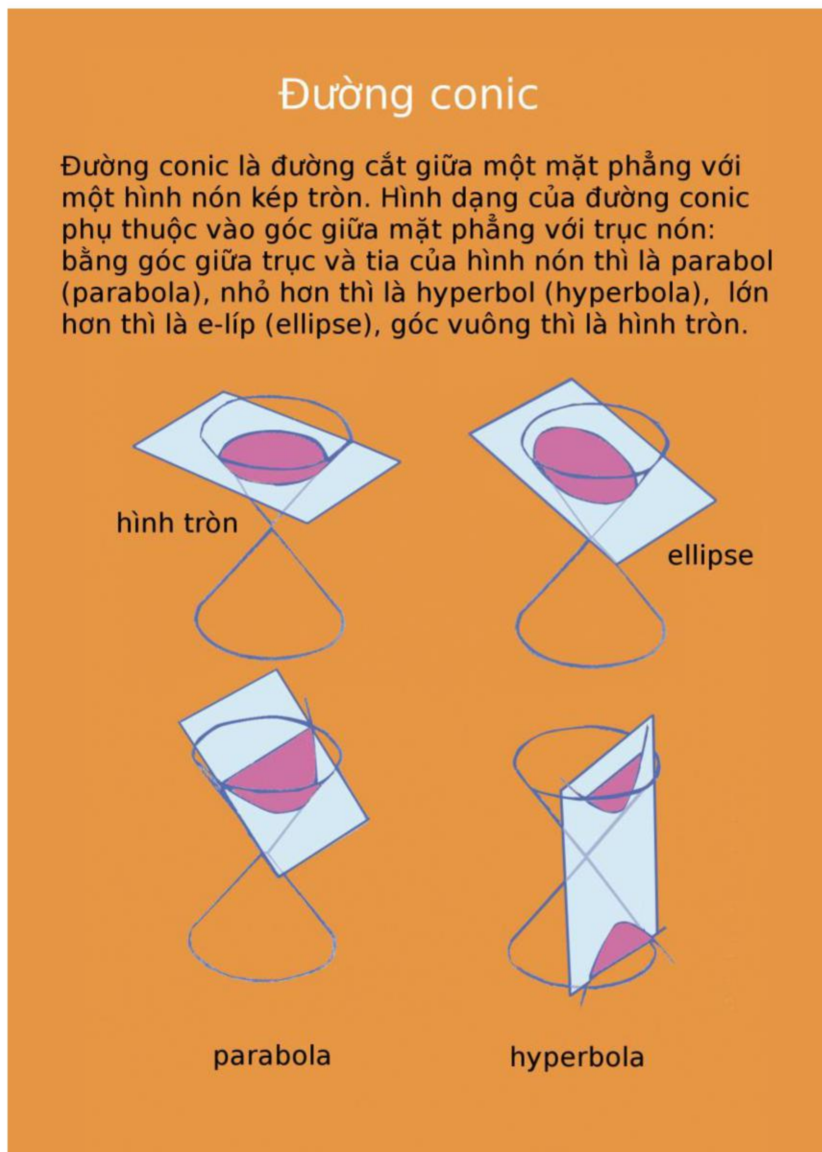
Chương 10 Lát cắt của một hình nón



Gần nhà ăn có một căn phòng mà lối vào thu hút sự chú ý của ba cậu bé. Có bốn hình nón đôi khổng lồ bằng nhựa bao lấy nó. Khi đến gần, chúng nhìn thấy mỗi hình nón được cắt bởi một mặt phẳng, và có thể nhìn thấy rõ những đường cong tạo thành ở những chỗ giao nhau. Một biển báo ở trên bức tường đối diện ghi:

CÁC ĐƯỜNG CONIC

Bên trong căn phòng có một tấm áp phích giải thích về các đường conic (cô-níc).



Các đường conic được nghiên cứu từ thời cổ Hy Lạp bởi các nhà hình học Euclid (khoảng 300 năm TCN), Archimedes (287-212 TCN), Apollonius (260-190 TCN).

Các đường conic đóng vai trò rất quan trọng trong toán học và ứng dụng từ thời cổ Hy Lạp. Johannes Kepler (1571-1630) đã khám phá ra rằng các hành tinh quay xung quanh mặt trời theo quỹ đạo hình e-líp chứ không phải hình tròn như người ta tin trước đó. Vào năm 1672, Sieur Casegrain đã phát minh ra kính thiên văn, sử dụng những tính chất phản chiếu của cả gương hyperbol và gương parabol, và phát minh đó đã được dùng trong thiết kế của kính thiên văn Hubble. Nhà thiên văn học người Anh Edmund Halley (1656-1742) đã sử dụng những hiểu biết về quỹ đạo hình e-líp để tiên đoán rằng sao chổi Halley xuất hiện (nhìn thấy được từ trái đất) theo chu kỳ 76 năm một lần.

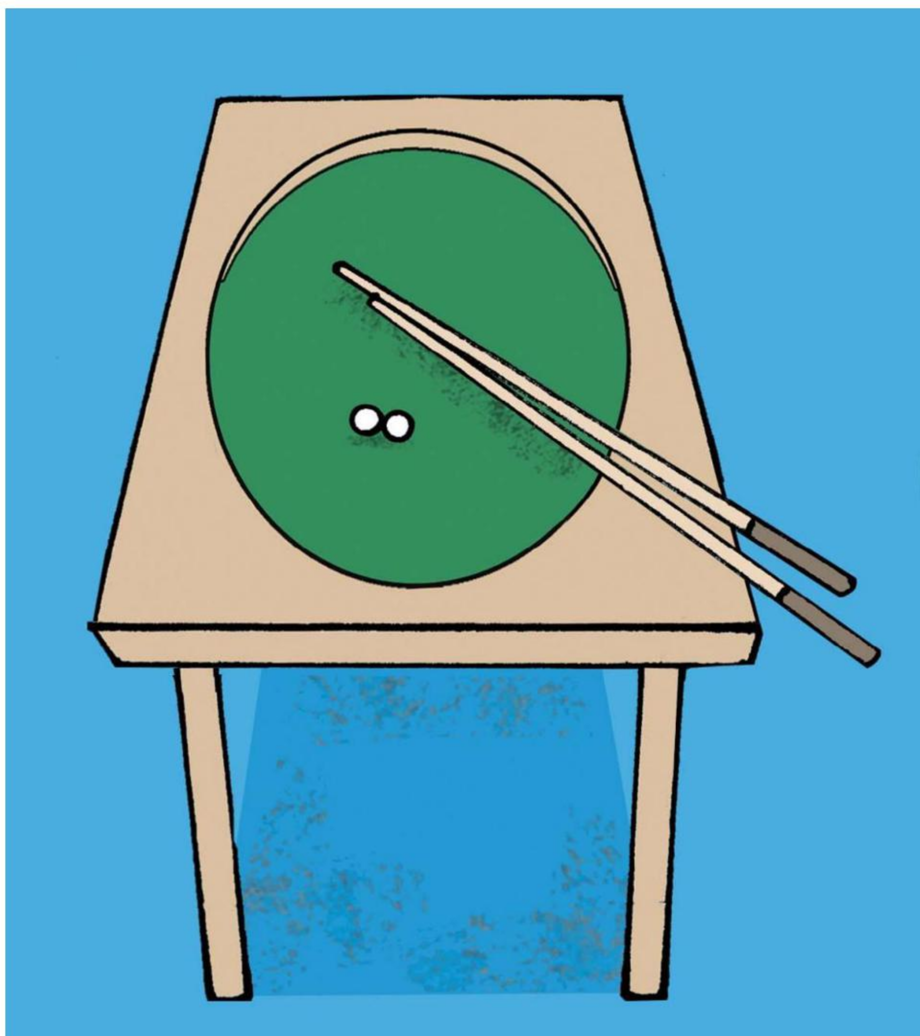
Ba cậu bé chưa hề biết gì về các đường conic, ngoại trừ đường tròn, nhưng chúng rất phấn khích khi nhìn thấy những đứa trẻ khác dường như đang chơi hay làm thí nghiệm với những mô hình khá lớn ở trong phòng.

Đầu tiên chúng đi đến chỗ giống như cái bàn bi-a. Nó có hình một đường cong mà bây giờ chúng đã biết là đường e-líp.

"Đây là một trò chơi bi-a mà các em sẽ không thể thua được". Một hướng dẫn viên tên là Satsu tiến đến gần chúng và nói.

"Anh chơi nó như thế nào ạ?". Kino hỏi.

"Một e-líp có hai điểm đặc biệt ở bên trong, gọi là *tiêu điểm*. hãy để một trái bóng lên mỗi tiêu điểm".

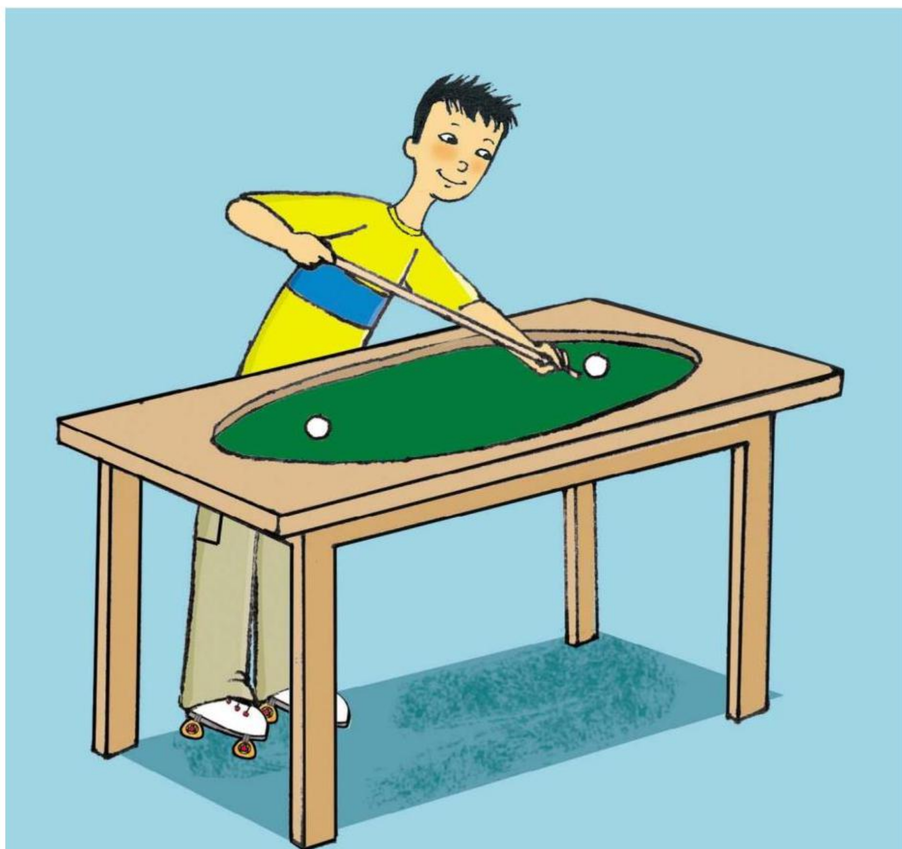


“Bây giờ em có thể cược với ai đó rằng nếu em dùng cơ đánh vào một trái bóng, thì thể nào nó cũng sẽ đập vào trái bóng kia”. Satsu tiếp tục. “Em làm thử xem”.

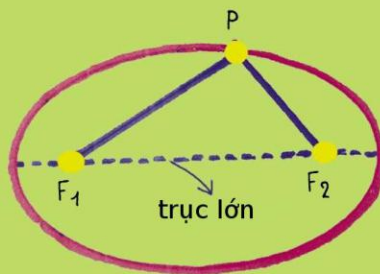
Ichiro lấy một cây cơ đánh vào một trái bóng, và quả nhiên, trái bóng bật ra từ biên của đường e-líp, đập va vào trái bóng kia.

Tiếp theo tới lượt Kino, và sau đó là Jai.

“Tại sao nó lại đập được vậy ạ?”. Các cậu bé hỏi.



“Đó là vì nó có những tính chất phản xạ do hình dạng của nó tạo ra”. Satsu vừa nói vừa dẫn các cậu bé đến chỗ một tấm áp phích về e-líp.

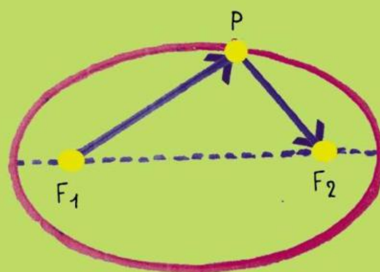


Ellipse

Một hình e-líp (ellipse) là tập hợp các điểm P trên mặt phẳng sao cho tổng khoảng cách đến hai điểm P1 và P2 cho trước là không đổi. Hai điểm đó gọi là các tiêu điểm của hình e-líp.

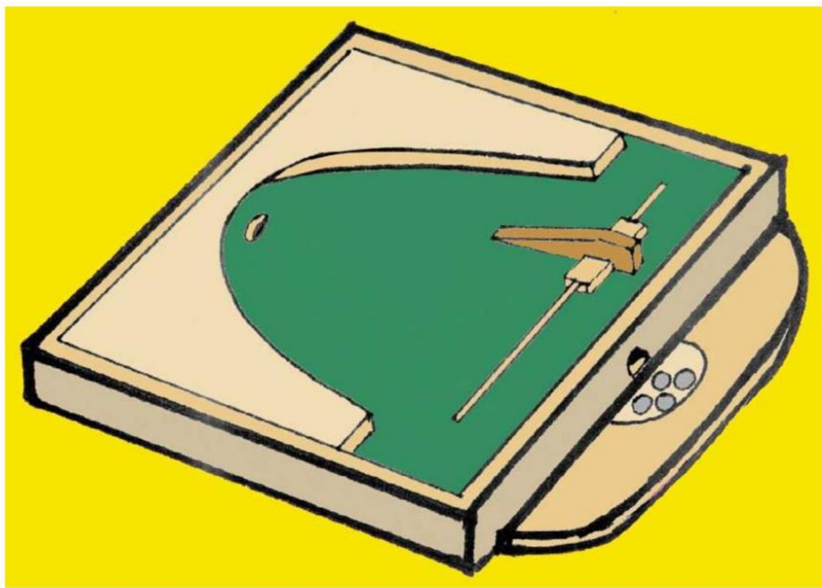
Tính chất phản xạ

Một tia sáng đi từ tiêu điểm F1 đập vào đường e-líp tại một điểm P sẽ phản xạ theo hướng đi từ P đến tiêu điểm F2



"Dù trái bóng tại điểm F_1 được đánh va vào bất kì điểm nào trên biên của elip, thì nó đều phản xạ ngược về điểm F_2. Những đường

conic khác cũng có những tính chất phản xạ đặc biệt", Satsu nói tiếp. "Để anh cho các em xem mô hình minh họa tính chất phản xạ của parabol".



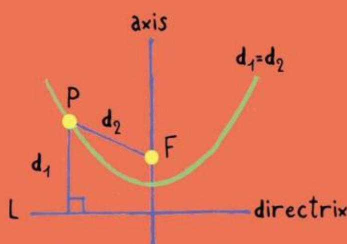
Satsu dẫn chúng đến một cái bàn và chúng thấy cái gì đấy trông giống như một đồ chơi. Đồ chơi đó bắn các quả bóng từ nhiều vị trí khác nhau về phía một đường cong, đường mà bây giờ chúng biết là parabol, và các quả bóng đều phản xạ đến một cái lỗ rồi rơi xuống ở đó.

Jai đang tập trung suy nghĩ. "Trong trò chơi bi-a, trái bóng cũng luôn phản xạ đến một tiêu điểm. Cái lỗ đó là một tiêu điểm phải không ạ?"

Anh Satsu ngạc nhiên vì sự nhanh nhạy trong cách nhìn nhận sự việc của Jai.

"Đúng rồi", anh ấy đáp, "một parabol có một tiêu điểm và cái lỗ đó chính là tại tiêu điểm".

Anh chỉ cho bọn trẻ tấm áp phích về parabol.

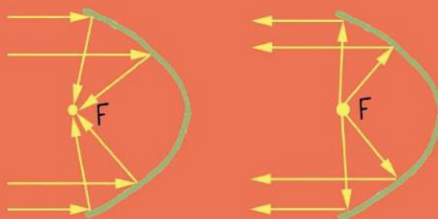


Parabola

Đường parabol được tạo thành từ các điểm P trên mặt phẳng sao cho khoảng cách từ P đến một điểm F cho trước (gọi là *tiêu điểm*) bằng khoảng cách từ P đến một đường thẳng L cho trước (gọi là *directrix*)

Tính chất phản xạ

Các tia bắn vào đường parabol theo hướng song song với trục đối xứng của nó sẽ phản xạ về tiêu điểm



"Ở nhà các em có ăng-ten parabol cho ti vi không?".

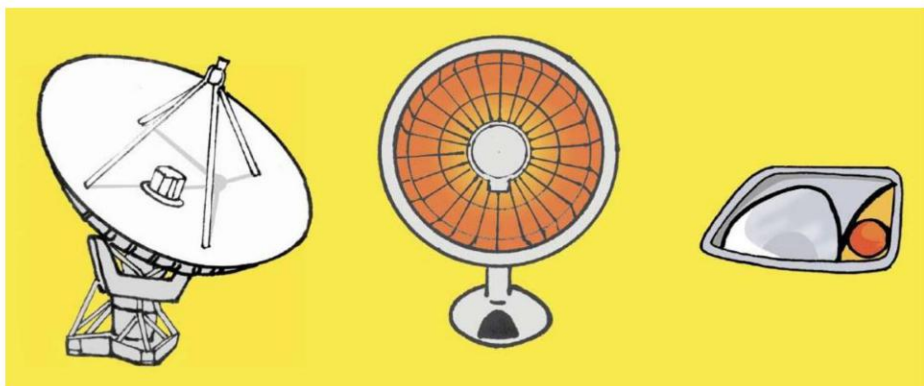
"Có ạ", bọn trẻ cùng trả lời.

"Ừ, hình dạng của nó là mặt parabol (gọi là paraboloid) và nó cũng hoạt động theo nguyên tắc như vậy. Ăng-ten tập trung các tia sóng phát hình và phát âm tại tiêu điểm, để cho ti vi có thể bắt được hình ảnh và âm thanh tốt hơn".

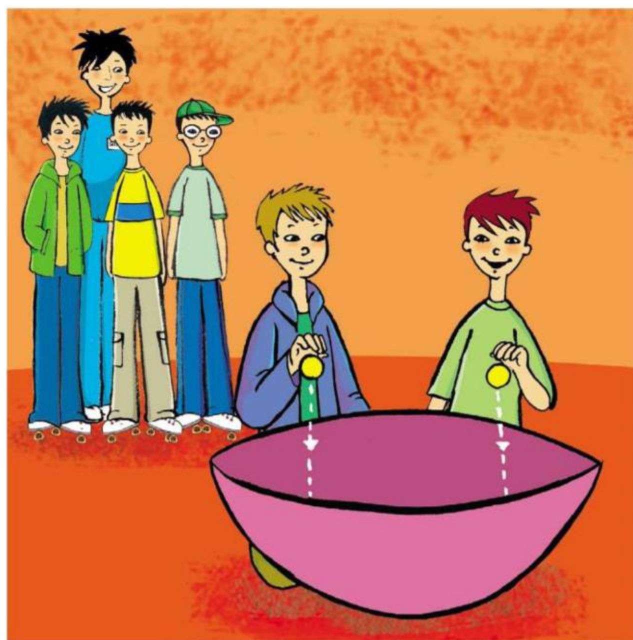
Các cậu bé rất ngạc nhiên vì chúng chưa bao giờ tưởng tượng ra được toán học lại có liên quan gì đến việc làm rõ nét hình ảnh trên màn hình ti vi nhà chúng.

"Từ đường parabol, làm thế nào để tạo ra mặt parabol ạ?", Jai hỏi.

"Chỉ cần quay đường parabol 180 độ xung quanh trục của nó thôi", Satsu trả lời.



Satsu dẫn chúng đến nơi có trưng bày những thiết bị ứng dụng thực tế liên quan đến tính chất phản xạ của mặt parabol. Chúng nhìn thấy ăng-ten parabol, lò sưởi halogen, và đèn pha xe hơi.





Ở cạnh đó có hai cậu bé thả cùng một lúc hai quả bóng từ cùng một độ cao xuống một mặt parabol, và những quả bóng va chạm nhau gần như tại cùng một điểm cố định. Các cậu bé quan sát thí nghiệm này vài lần. Chúng nhận ra điểm va chạm này là tiêu điểm.

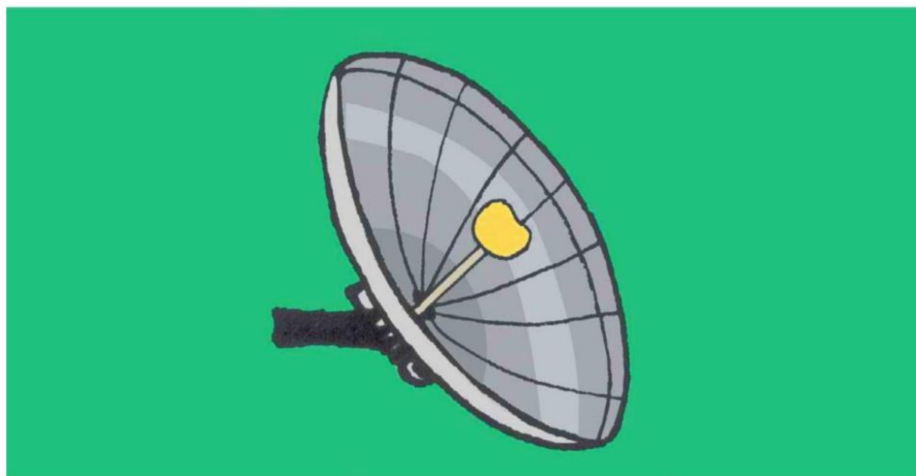
"Chúng ta có một thí nghiệm ngoài trời liên quan đến mặt parabol, các em có muốn xem không?", Satsu hỏi.

Họ trèo một cầu thang ra sân chơi của Thế giới Kỳ diệu. Satsu dẫn chúng đến chỗ có đặt một mặt parabol. Các cậu bé nhìn xung quanh và thấy ở đây cũng được dàn dựng như một triển lãm ngoài trời với một số các vật thể lớn được trưng bày.

"Có nhiều thứ mà chúng mình chưa từng nhìn thấy", Kino thốt lên.

"Chúng ta có thể ra đấy sau khi xem xong mọi thứ ở trong nhà", Ichiro nói.

"Nếu hôm nay chúng ta có thời gian, còn nhiều thứ ở bên trong mà chúng ta cũng chưa xem đấy", Jai nói.



Satsu chỉ cho chúng một mặt parabol có củ khoai tây được đặt tại tiêu điểm. Anh ấy điều chỉnh mặt parabol sao cho các tia sáng mặt trời chiếu song song với trục của nó.

"Chờ một chút, củ khoai tây sẽ được nướng chín đấy".



Trong lúc đợi khoai tây chín, Satsu chỉ cho các cậu bé một cái bếp nấu ăn bằng năng lượng mặt trời. Đáy của nó là một mặt parabol có thể điều chỉnh theo hướng mặt trời, và ở giữa có một cái đĩa để đặt ấm đun nước hoặc chảo chiên.

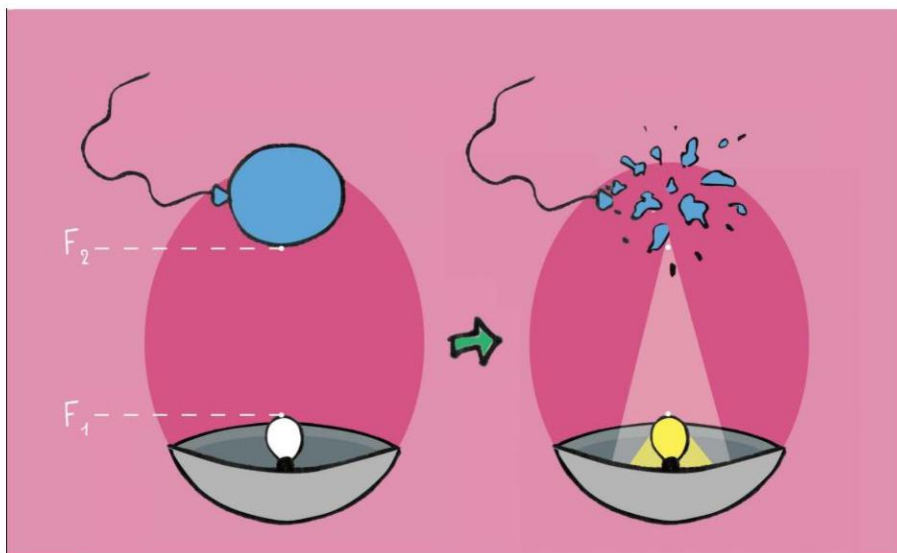
“Thử luộc một quả trứng xem”. Satsu nói rồi đổ đầy nước vào cái ấm và bỏ một quả trứng vào trong.

Các cậu bé thích thú với thí nghiệm này. Một lúc sau vỏ khoai tây bị chuyển màu, và nước trong ấm cũng sôi lên.

“Mang cái này đi picnic thì rất hay”, Kino nói.

Satsu đưa bọn trẻ củ khoai tây nướng và quả trứng luộc, rồi dẫn chúng quay về phòng trưng bày các đường conic.

“Chúng ta hãy đi sang phía bên kia đi”. Satsu dẫn ba cậu bé đến chỗ trưng bày đồ vật tiếp theo. Chúng nhìn thấy một cái bát và một cái bóng đèn ở giữa.



“Đây là một phần của ellipsoid, tức là mặt hình e-líp”, Satsu nói. “Trên một tiêu điểm ta có một bóng đèn”.

“Để làm gì ạ?”, Ichiro hỏi chen vào.

“Em hãy thổi quả bong bóng này lên và đặt nó vào chỗ tiêu điểm thứ hai xem nó có bị nổ không?”. Satsu nói.

Ichiro làm theo, Satsu bật công tắc bóng đèn, một lúc sau, quả bong bóng nổ tung.

“Các em có thể giải thích điều gì đã xảy ra không?”, Satsu hỏi ba bạn.

“Em nghĩ là ánh sáng từ một tiêu điểm phát ra, phản chiếu xuống phần phía đáy của mặt hình e-líp, rồi hội tụ tại tiêu điểm còn lại mà bong bóng được đặt. Em nghĩ là sức nóng của ánh sáng hội tụ đã làm cho bong bóng vỡ”, Ichiro trả lời.

“100 điểm dành cho câu trả lời hoàn hảo!”. Satsu khen ngợi Ichiro.

"Trong bệnh viện, chúng ta cũng sử dụng cùng nguyên lý này để điều trị, phá vỡ sỏi thận đấy" Satsu nói.

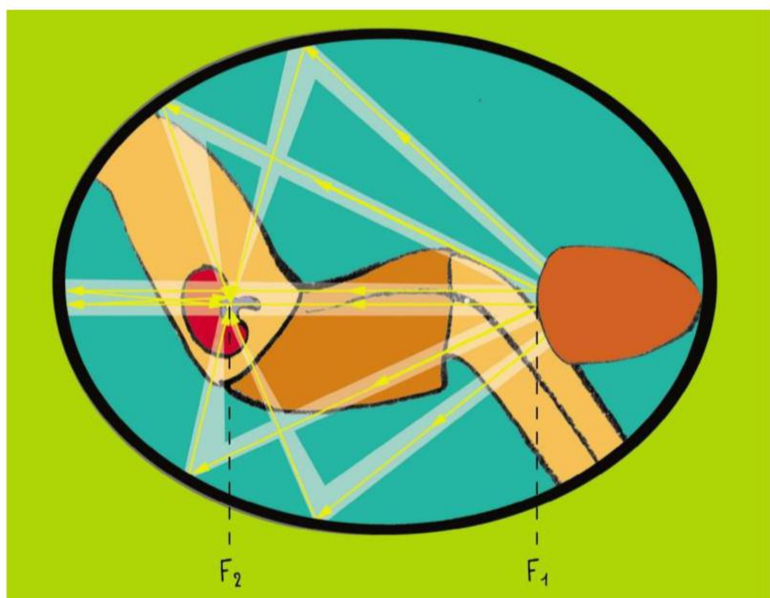
Các cậu bé chưa hiểu điều Satsu nói. "Cách thức được sử dụng như thế nào ạ?", chúng hỏi.

"Khi sỏi hình thành ở trong thận, nó sẽ gây ra đau đớn và viêm nhiễm cho người bệnh. Trước kia, để điều trị nó chỉ có một cách là phẫu thuật. Nhưng bây giờ có một phương thức mới được gọi là ESWL, viết tắt của cụm từ extracorporeal (từ bên ngoài cơ thể) shockwave (sóng xung kích) lithotripsy (nghiền nát sỏi)".

"Ồ, cái tên dài quá nhỉ. Anh hãy nói chầm chậm lại một lần nữa được không ạ", Kino nói.

"Gọi là *máy nghiền sỏi thận bằng sóng xung kích từ ngoài cơ thể*". Satsu nhắc lại và tiếp tục giải thích.

"Máy nghiền sỏi thận có mặt hình e-líp. Bác sĩ đặt bệnh nhân vào vị trí sao cho chỗ có sỏi trong thận là một tiêu điểm của mặt hình e-líp. Sau đó bác sĩ chiếu sóng âm từ tiêu điểm khác. Sóng âm sẽ làm tiêu tan sỏi, và do đó không cần đến phẫu thuật nữa."



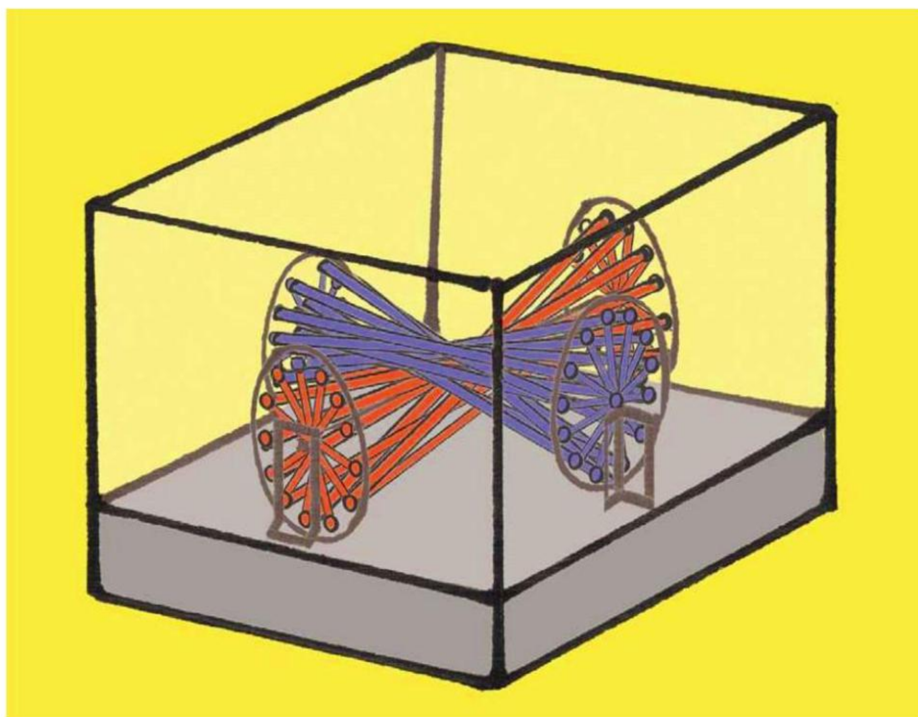
Jai thì đang tưởng tượng ra cái máy sẽ trông thế nào.

“Thế có nghĩa là để trở thành bác sĩ cũng phải tinh thông toán học có phải không ạ?”, Kino hỏi.

“Các bác sĩ ngày nay cần rất nhiều đến toán học. Các mô hình mạng lưới được sử dụng để theo dõi sự phát triển của các khối u, các phương trình vi phân dùng để mô phỏng sự lây lan của dịch bệnh, và có một cái máy gọi là MRI ngày nay cho phép chụp ảnh bên trong cơ thể người tốt hơn là các máy X-quang. Phải có giải tích toán học mới phân tích được chính xác các hình ảnh đó”. Satsu trả lời.

Các cậu bé hoàn toàn bị ấn tượng, mặc dù chúng không hiểu gì về các thứ toán mà Satsu đang nói đến.

“Đây là cái gì vậy?”, Ichiro tiến đến một cái mô hình xoay và hỏi.



“Mô hình này minh họa cách mà các bánh răng cưa truyền chuyển động từ trục này sang trục khác. Một số loại bánh răng cưa được

dùng trong xe hơi và các máy móc khác được làm dựa trên các mặt hyperboloid, tức là mặt hình hyperbol. Ở đây chúng ta có hai mặt hyperboloid tiếp giáp với nhau dọc theo một đường. Khi một hypeboloid quay quanh trục của nó, thì hypeboloid kia cũng bị đẩy quay quanh trục của nó, truyền chuyển động theo hướng này sang chuyển động theo hướng khác". Satsu giải thích cho các cậu bé.

Gần đấy có một tấm áp phích về hình hyperbol.

"Anh Satsu, chúng em cảm ơn anh rất nhiều ạ". Ba bạn lễ phép nói với anh Satsu, và chúng bắt đầu bàn xem tiếp tục đi đâu.

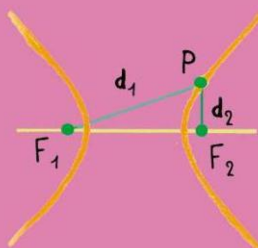
"Bọn mình có đi xem các mô hình ở bên ngoài không?", Kino đề nghị.

"Nhưng chúng ta vẫn chưa xem các thứ ở tầng một mà", Ichiro phản đối.

"Chúng ta có thể đến đây vào một ngày khác nữa", Jai nói. "Dù sao chúng ta cũng nên đến tầng một thử xem".

"Ừ, được đó", Kino cũng đồng ý.

$|d_1 - d_2| = \text{Constant}$

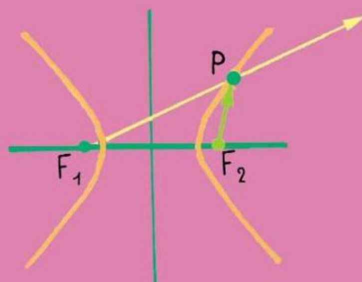


Hyperbola

Một đường hyperbol là một đường được tạo bởi những điểm P trên mặt phẳng sao cho hiệu giữa hai khoảng cách từ P đến hai điểm F1 và F2 cố định nào đó là một hằng số nào đó.

Tính chất phản xạ

Một tia sáng đi từ một tiêu điểm của hyperbol sẽ phản xạ khi đập vào đường hyperbol để tạo hành một tia thẳng hàng với tiêu điểm thứ hai.





Chương 11 Giấy xoắn

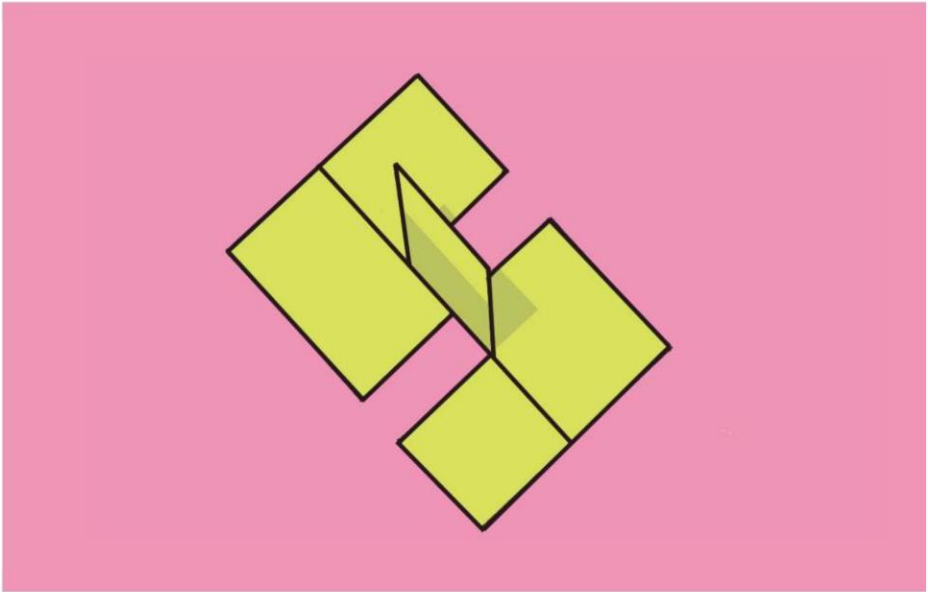
Quay trở lại tầng một, ba cậu bé nhìn thấy các bạn trẻ đang ngồi quanh những cái bàn và cắt dán giấy. Chẳng có gì hấp dẫn cả, nhưng rồi chúng lại thấy các bạn trông rất say sưa tập trung và thích thú, vì thế chúng nán lại ở cửa.

Một hướng dẫn viên trong phòng tên là Toshi nhìn thấy và mời chúng vào trong: "Các em có muốn tham gia cùng không?".

"Các em ngồi xuống đằng kia đi", Toshi nói và chỉ mấy chỗ trống quanh bàn.

"Các em đến đây lần đầu tiên phải không, bây giờ mọi người ngồi đây, chúng ta khởi động nào". Toshi kêu gọi sự chú ý của bọn trẻ.

Toshi lấy một tờ giấy, cắt và gấp thành một vật thể, rồi giơ lên cao cho mọi người nhìn thấy.

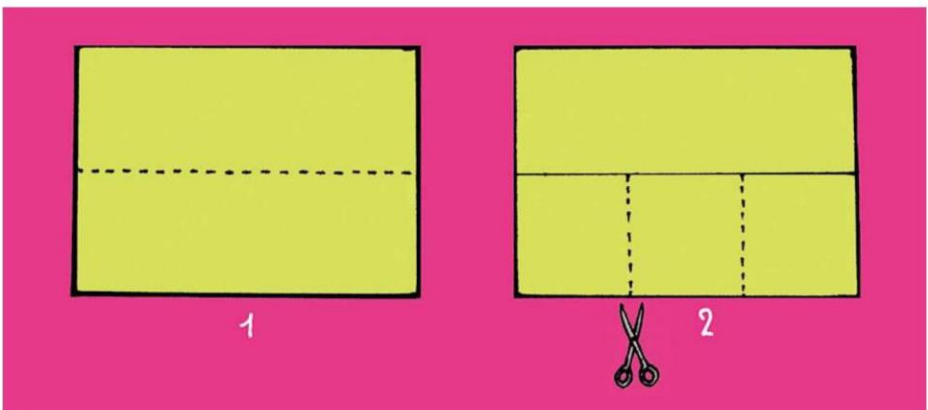


“Đây là một tờ giấy với ba đường cắt bằng kéo. Các em có thể làm một cái tương tự như thế này được không?”.

“Cái này khó quá”, Kino nói.

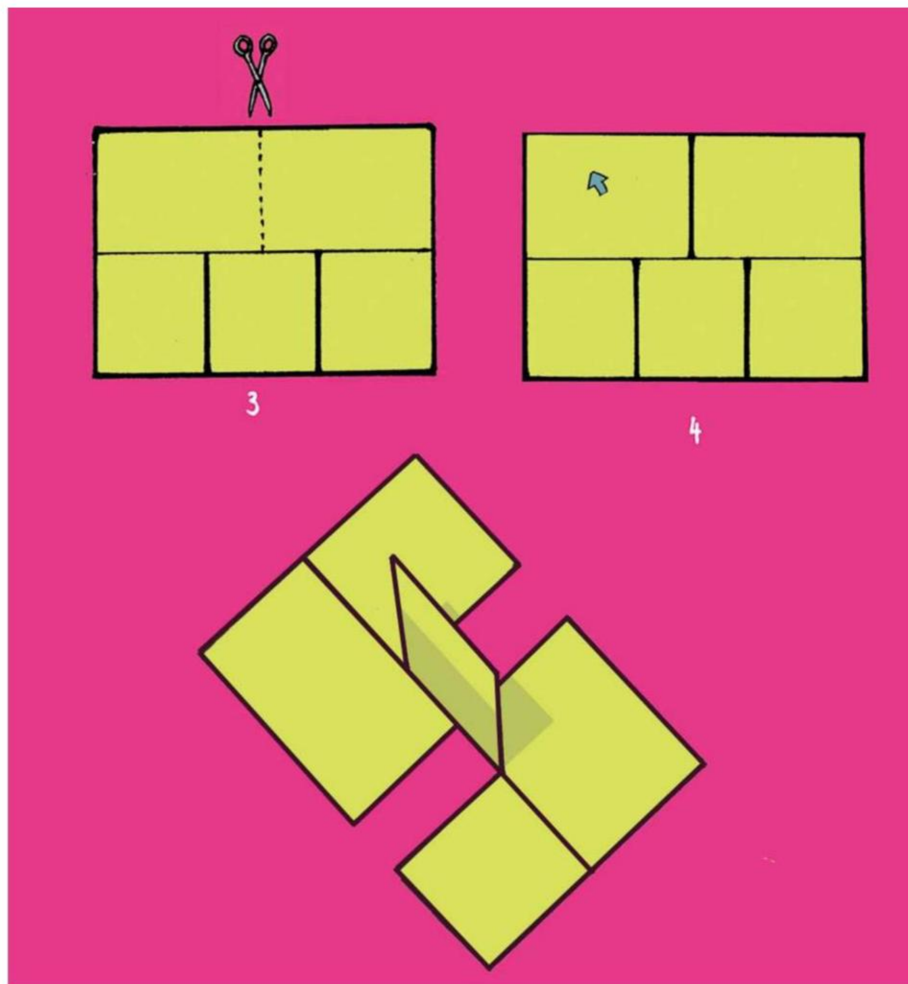
Còn Jai và Ichiro thì chăm chú nhìn mô hình. Jai phát hiện ra ngay thủ thuật. Ichiro mất nhiều thời gian hơn nhưng rồi cũng nhìn ra.

Giống như nhiều đứa trẻ các, Kino không biết phải làm thế nào.



"Đầu tiên, gấp đôi tờ giấy lại để có được nếp gấp". Jai giải thích cho Kino. "Tiếp theo, chia một bên nửa tờ giấy thành ba phần bằng nhau và lấy kéo cắt theo hai đường chia đó. Phía bên kia của tờ giấy thì chia làm hai phần bằng nhau và lấy kéo cắt theo đường chia. Sau đó xoay một phần nửa vừa mới cắt xong 180 độ, thì cậu sẽ có được hình này".

Trong khi Jai giải thích, Ichiro cố gắng minh họa từng bước cho Kino thấy.

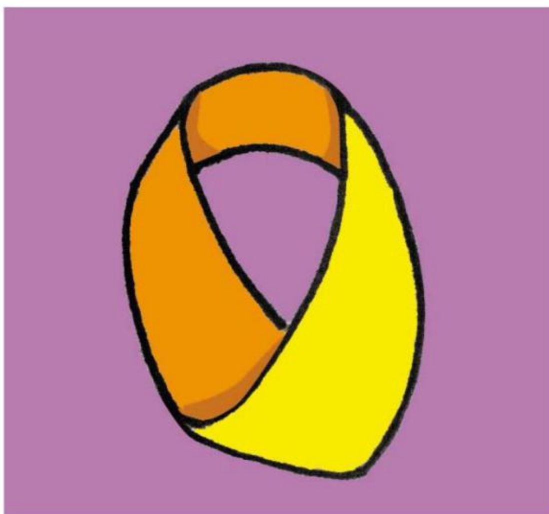


Toshi đi vòng quanh các bàn để nhìn xem bọn trẻ làm như thế nào, gợi ý cho chúng, giải thích các thắc mắc, cho đến khi tất cả đều làm xong.

“Các em có thể làm ra được nhiều kết quả bất ngờ thú vị khác từ việc xoắn các tờ giấy đấy”, anh ấy nói.

Toshi lấy một dải băng bằng giấy, một mặt màu vàng và mặt kia màu cam. “Anh sẽ xoắn dải băng này một nửa vòng rồi và dán hai đầu của nó lại với nhau”.

“Các em có tin không, dải băng này giờ chỉ có một mặt thôi!” anh ấy nói.



“Anh ấy nói nó chỉ có một mặt thôi hả?”, Kino hỏi hai người bạn.

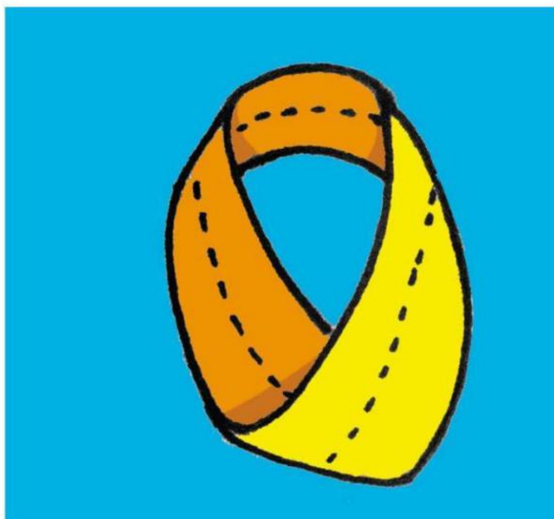
“Anh có thể nhắc lại một lần nữa được không ạ?”, Ichiro yêu cầu Toshi nói lại để khỏi bị nghe nhầm.

“Em lại đây, giúp anh chứng minh điều anh vừa nói”, Toshi gọi Ichiro.

“Đầu tiên, em hãy đánh dấu một điểm trên bề mặt dải băng, sau đó kẻ một đường bắt đầu từ điểm đánh dấu, dọc theo chiều dài của bề mặt”, anh ấy hướng dẫn cho Ichiro.

Ichiro làm theo lời anh ấy và đường kẻ của cậu kết thúc ngay tại điểm đánh dấu ban đầu. Khi cậu nhìn lên bề mặt dải băng, thì đường kẻ đã đi qua cả phần mặt màu vàng và màu cam luôn!

Biểu diễn của Ichiro làm cho mọi người thích thú và căn phòng trở nên tràn đầy hưng phấn.



“Bề mặt đặc biệt này được gọi là băng ***Mobius*** [1]”. Toshi nói. Tính chất mà chúng ta vừa thấy khiến cho băng Mobius trở nên hình dạng lý tưởng của dải băng chuyền. Bởi vì, bằng cách sử dụng cả hai mặt thay vì chỉ sử dụng một mặt,tuổi thọ của dải băng cũng được tăng gấp đôi.”

“Các em sẽ thấy ngạc nhiên khi làm thí nghiệm với băng Mobius đó!”. Toshi báo trước.

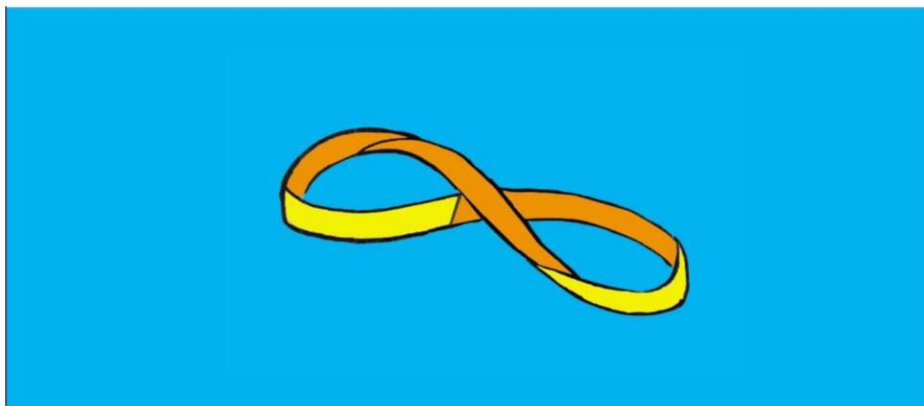


Toshi đem ra một băng Mobius đã chuẩn bị trước, lấy kéo và bắt đầu cắt men theo đường chính giữa chia đôi chiều rộng của băng.

“Các em nghĩ thử xem nó sẽ thành hình gì?”. Toshi hỏi các bạn nhỏ.

Một bạn nữ mạnh dạn trả lời: “Thành hai băng Mobius có độ rộng chỉ bằng một nửa của dải băng ban đầu”.

Toshi tiếp tục cắt, rồi giơ lên cao cho bọn trẻ thấy... Khi bọn trẻ nhìn thấy kết quả cuối cùng - một dải băng dài xoắn hai nửa vòng - thì chúng không tin nổi vào mắt mình nữa, và vỗ tay hoan hô.



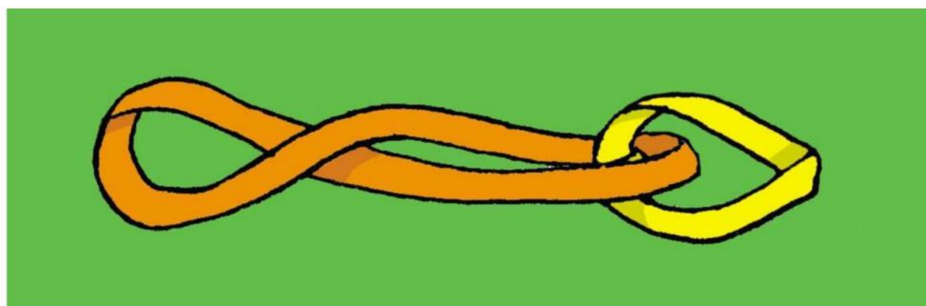
Các hướng dẫn viên bắt đầu phân phát các dải băng giấy, bút chì, hồ dán và kéo cho mọi người.

"Bây giờ mỗi em hãy làm cho mình một băng Mobius đi. Sau đó, kẻ hai đường thẳng song song chạy dọc theo dải băng, rồi cắt theo đường kẻ đó. Nhìn xem nó sẽ thành hình gì?". Toshi nói với các em.

"Có thể chúng ta sẽ được nhìn thấy một dải băng dài với ba xoắn". Ichiro dự đoán như vậy.

Căn phòng trở nên im ắng khi các bạn trẻ tập trung cắt dán.

Một lát sau, những âm thanh của sự ngạc nhiên và phấn khởi vang lên khắp phòng khi chúng cắt xong.



"Xong rồi!". Kino vừa nói vừa cầm hai dải băng Mobius đan xen vào nhau. Một băng ngắn hơn với một xoắn (tức là xoắn một nửa vòng), và một băng dài hơn với hai xoắn.

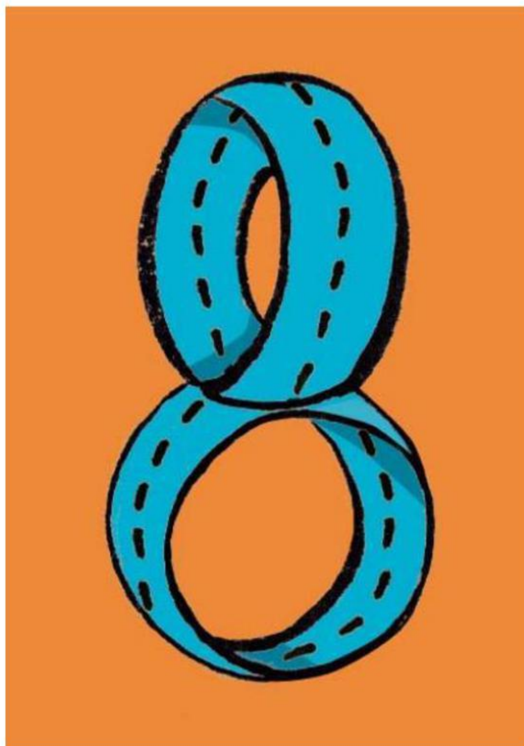
"Điều này thật là kì lạ". Jai nói. "Nó sẽ thành hình gì nếu chúng ta cắt theo ba đường, hoặc bốn đường và vân vân?".

"Khi về nhà các em làm thử đi. Quan sát xem nó có tuân theo một quy luật nào không, rồi thử suy nghĩ xem là tại sao nó lại như vậy". Toshi nói.

Như được khơi dậy tính hiếu kì, ba cậu bé thỏa thuận với nhau rằng khi về nhà chúng sẽ thực hành làm ngay.

Về phần Jai, cậu đã ghi nhớ lại trong đầu: "Dải băng Mobius, cắt theo ba đường, cắt theo bốn đường, và cứ tiếp tục như vậy cho đến khi tìm ra được quy luật".

Bây giờ Toshi cầm hai dải băng vòng tròn giống nhau và định vị chúng sao cho chúng vuông góc với nhau. Sau đó anh ấy dán chúng lại. Có một đường kẻ nét đứt ở chính giữa, chạy dọc theo chiều dài của mỗi dải băng, và chia độ rộng của dải băng thành hai phần.

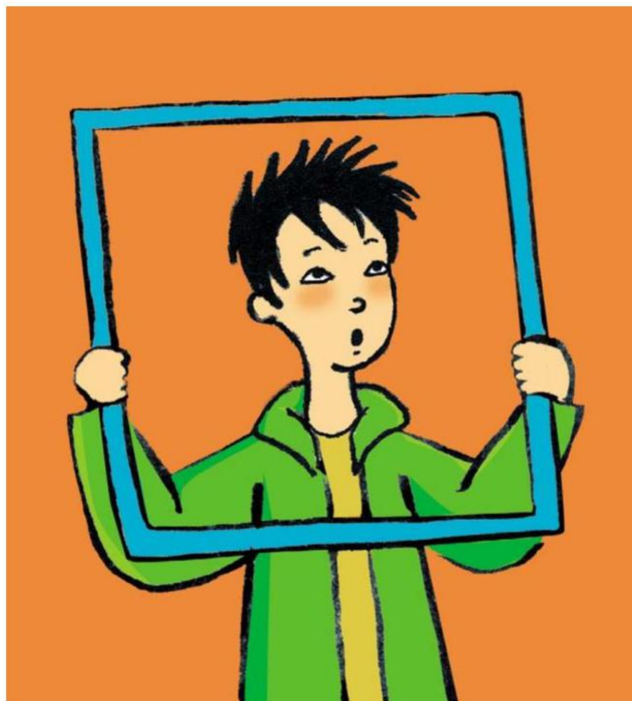


“Ai có thể cắt cho anh dọc theo đường kẻ của hai dải băng này nào? Còn các em khác thử suy nghĩ xem nó sẽ ra hình gì”. Toshi nói, và rất nhanh, Kino đã xung phong nhận việc cắt.

“Có thể nó sẽ thành một dải băng tròn với độ rộng bằng một nửa độ rộng của những dải băng ban đầu”. Ichiro đoán.

“Mình cũng nghĩ như vậy”. Jai tán thành.

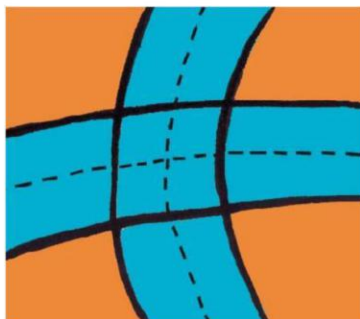
Mọi người cùng nhìn theo mũi kéo của Kino. Được một lúc thì xong, và tất cả đều rất ngạc nhiên, bởi vì nó là một cái "khung ảnh" hình vuông.



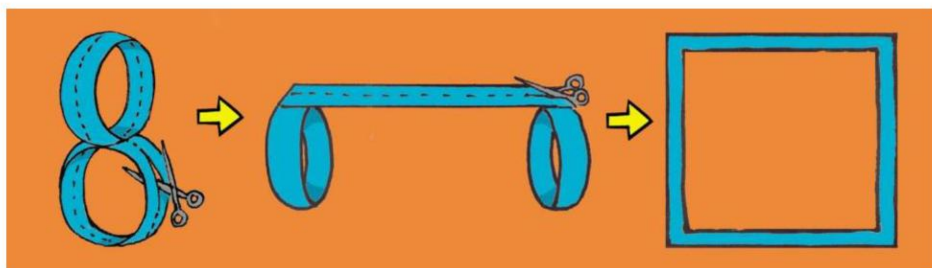
“Làm thế nào mà nó lại ra như vậy nhỉ?”. Ichiro hỏi.

Toshi lấy một đôi dải băng vuông góc với nhau mà chưa bị cắt.

“Tại phần dán của hai dải băng tròn, hai đường kẻ nét đứt vuông góc với nhau tạo thành bốn góc vuông, chính là bốn góc của khung”. Toshi giải thích.



Sau đó anh ấy biểu diễn lại việc cắt một lần nữa, làm theo một trình tự nhất định, mọi người cùng nhìn theo.



Trong khi Jai và Ichiro đang say sưa thảo luận về "hai dải băng cắt thành một cái khung", Toshi gọi bọn chúng chú ý đến một trò cắt dán tiếp theo.

"Lần này thì anh có hai dải băng Mobius, đặt vuông góc với nhau và dán chúng lại". Toshi nói.

Một lần nữa bọn trẻ nhìn thấy đường kẻ nét đứt chia độ rộng của dải băng làm hai phần bằng nhau và chạy dọc theo chiều dài của mỗi băng.



"Nếu cắt dọc theo đường kẻ này, thì sẽ được hình như thế nào nhỉ?". Toshi hỏi mọi người.

Bọn trẻ trở nên im lặng. Sau bài toán vừa rồi, chúng có vẻ không cảm giác được là sẽ ra hình gì, không biết phải nghĩ gì nữa. Nhưng chúng rất háo hức muốn thử làm bài toán này.

Một hướng dẫn viên phân phát mẫu giống như Toshi đang cầm cho mỗi em. Chúng nhanh chóng bắt đầu cắt, vô cùng tò mò muốn biết nó sẽ ra hình dạng như thế nào.



Khi Ichiro cắt xong thì hai dải băng đan xen lồng vào nhau, trông giống như hai trái tim. Còn Kino và Jai thì lại cắt ra hai dải băng hình trái tim tách rời nhau.

Các cậu bé, cũng như các bạn khác, đều ngạc nhiên và lúng túng.

Kino đặt câu hỏi mà tất bọn trẻ đều nghĩ trong đầu: "Tại sao một số bạn khi cắt thì được hai trái tim tách rời nhau, còn những bạn khác thì lại cho ra hai trái tim lồng vào nhau vậy ạ?".

"Câu hỏi rất hay". Toshi nói. "Bây giờ em đã suy nghĩ hệt như một nhà toán học rồi đó. Nhà toán học luôn quan sát, đặt các câu hỏi, và thử nghiệm".

"Các em sẽ tự tìm ra được lời giải của bài toán này". Toshi nói rồi chia bọn trẻ thành hai nhóm. Mỗi nhóm được hướng dẫn như sau:

Mỗi bạn trong nhóm thứ nhất làm hai băng Mobius xoắn theo cùng một hướng, sau đó dán chúng vuông góc với nhau, và cắt như trước đó.

Mỗi bạn trong nhóm thứ hai cũng làm hai băng Mobius, nhưng xoắn theo hai hướng ngược nhau, sau đó dán chúng lại và cắt như nhóm một.

Sau vài phút, Toshi hỏi: "Nhóm nào đã cắt được hình hai trái tim lồng vào nhau?".

"Nhóm hai ạ!" Các bạn nhỏ cùng đồng thanh.

Toshi đưa ra tóm tắt như sau: "Để được hai trái tim lồng vào nhau, thì hai băng Mobius cần được xoắn theo hai hướng ngược nhau. Để được hai trái tim tách rời nhau, thì hai băng Mobius cần được xoắn theo cùng một hướng."

Các cậu bé đã ghi nhớ. "Còn gì nữa không nhỉ?". Chúng tự hỏi với vẻ rất muốn được biết thêm.

"Anh sẽ đưa cho các em một bài tập về nhà nhé".

Các hướng dẫn viên đưa cho bọn trẻ những tờ giấy in bài toán sau.

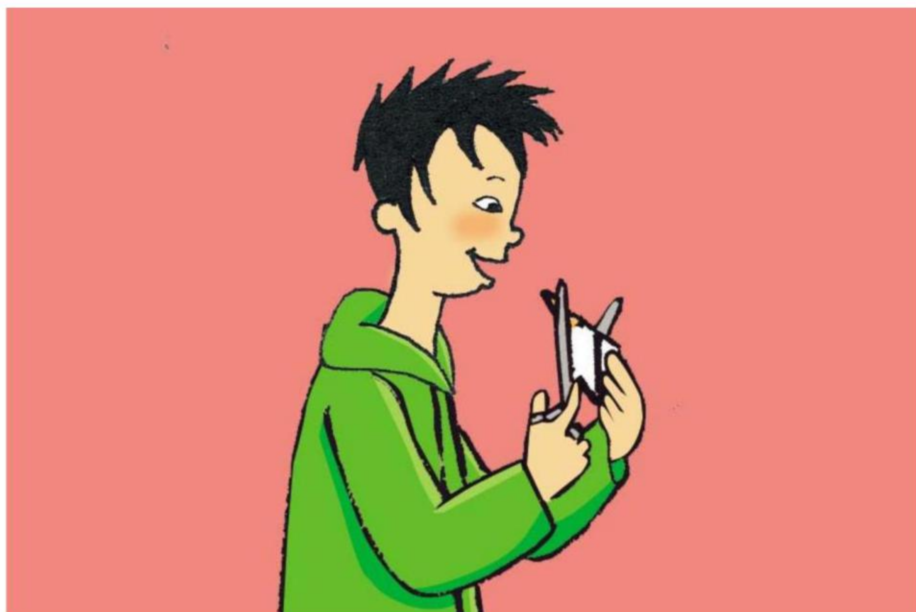
Cho 2 dải băng có độ rộng đủ lớn, được dán theo hình chữ thập tại trung điểm mỗi dải. Gọi phần bề ngang là A, và phần bề dọc là B.

Trước tiên, kẻ một đường chia A làm 2 phần. Tiếp theo, kẻ hai đường chia B làm 3 phần. Dán hai đầu của A mà không cần phải xoắn dải băng. Dán hai đầu của B sau khi đã xoắn một nửa vòng.

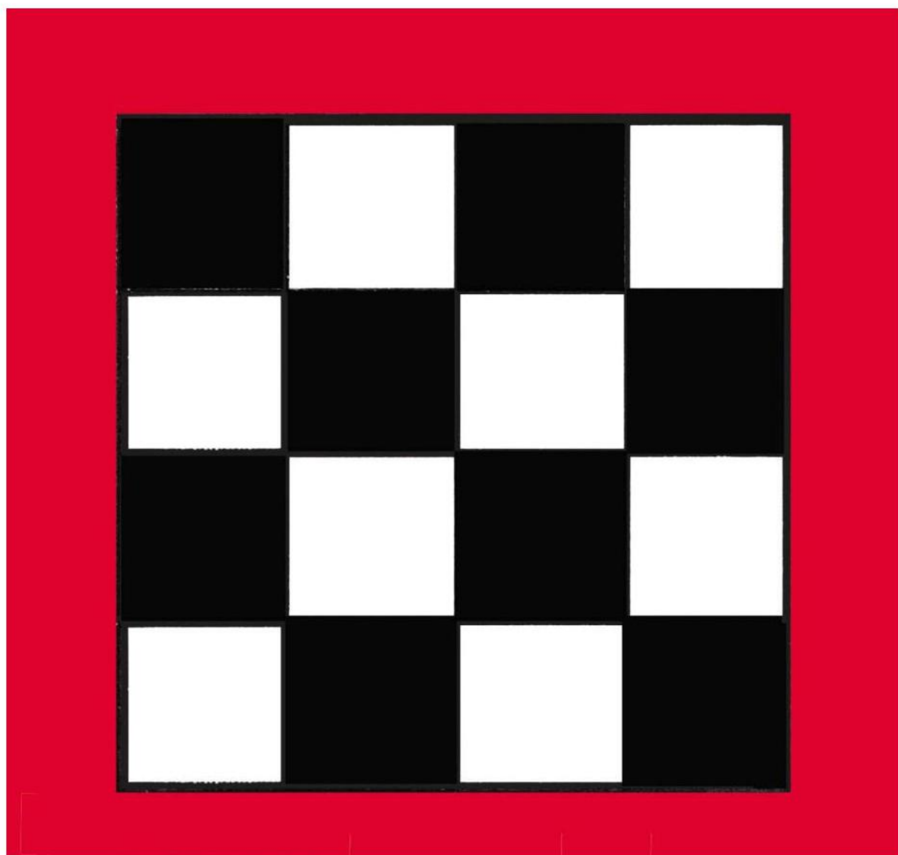
Cắt dọc theo đường kẻ ở B. Sau đó cắt dọc theo đường kẻ ở A.

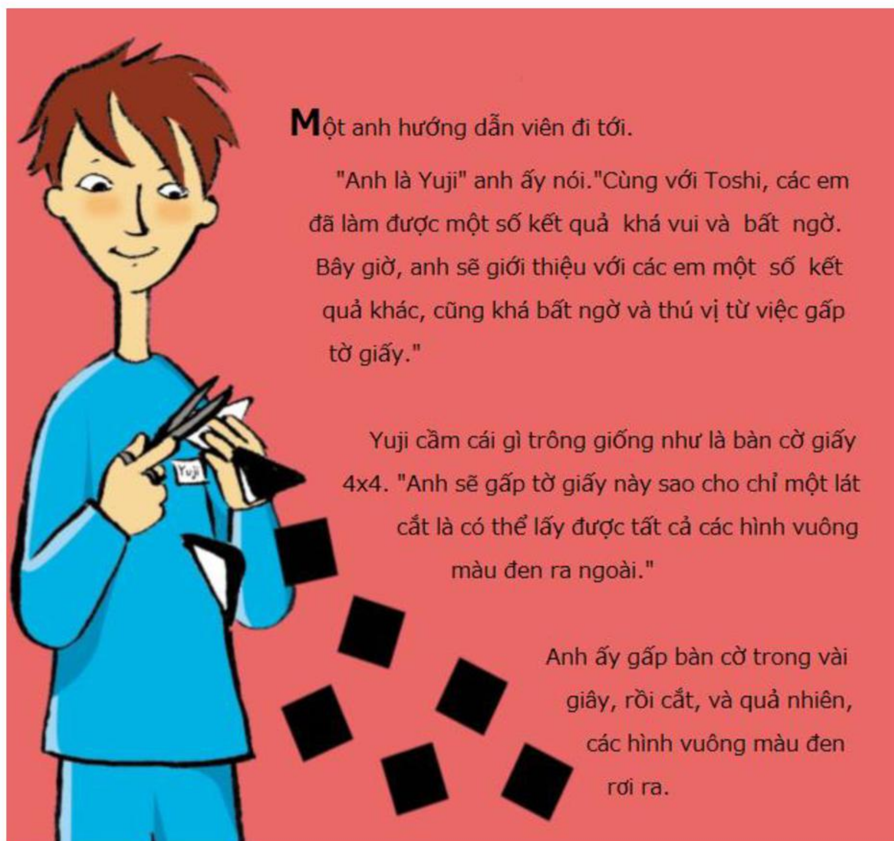
Và cuối cùng ta được hình gì? Bất ngờ!

Toshi rời đi để đón một nhóm các em nhỏ khác.



Chương 12 Gấp và cắt





"Ồ, thật là tuyệt", bọn trẻ vỗ tay tán thưởng.

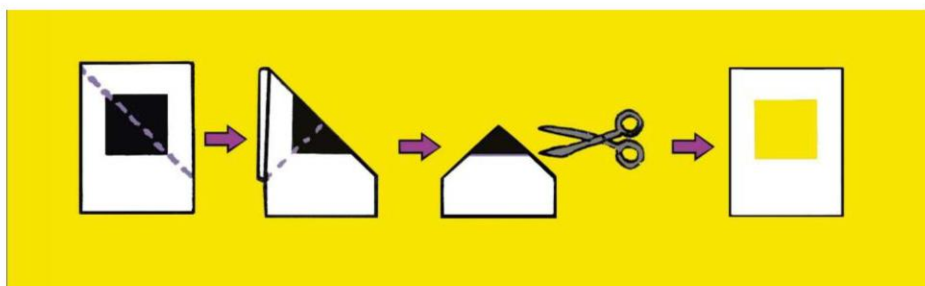
Các cậu bé mở to mắt kinh ngạc.

"Để bắt đầu, anh sẽ đưa cho các em cắt một vài hình đơn giản hơn", Yuji nói.

Các hướng dẫn viên phân phát những tờ giấy có vẽ một hình vuông màu đen.

"Các em hãy gấp tờ giấy này sao cho có thể cắt ra hình vuông màu đen chỉ bằng một nhát kéo thẳng, Yuji đưa ra chỉ thị.

Các cậu bé thấy bài tập này dễ, nên tất cả bọn chúng đều cảm thấy được khích lệ. Dưới đây là lời giải.



“Chúng ta thử thảo luận về lời giải. Chiến lược để tìm ra lời giải của các em như thế nào?”, anh Yuji hỏi.

“Em gấp bốn cạnh của hình vuông sao cho chúng cùng nằm trên một đường thẳng ạ”, Kino xung phong trả lời.

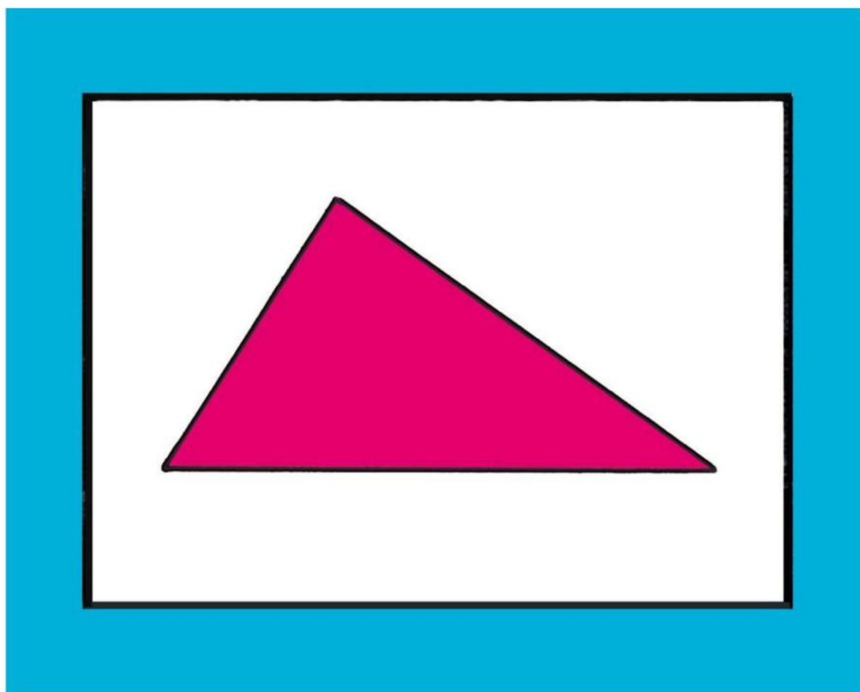
“Các em có nhận thấy là để gấp các cạnh vào với nhau thành cùng một đường thẳng, các em đã chia đôi các góc không?”, Yuji hỏi.

Các cậu con trai nhìn lại cách gấp của mình.

“Chúng em đã làm hai lần việc chia đôi góc ạ”, Ichiro báo.

“Trong chiến thuật gấp giấy để cắt bằng một nhát kéo thường có việc chia đôi các góc”, Yuji tiếp tục. “Nhưng có một chi tiết mà các em cần chú ý. Đó là các đường biên sau khi gập lại phải chiếm toàn bộ đoạn đường thẳng mà các em định cắt”.

Với những gợi ý này, Yuji yêu cầu bọn trẻ thử làm một bài tập khác. Các hướng dẫn viên phân phát những tờ giấy có vẽ một hình tam giác.



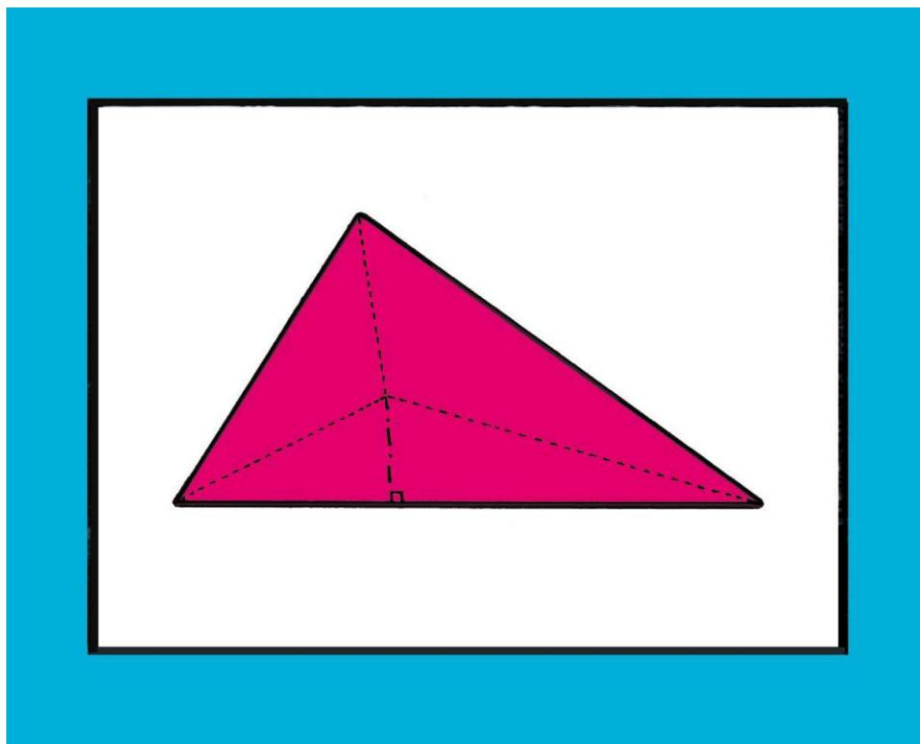
Ba cậu bé vật lộn với bài toán. Nó không đơn giản như hình thứ nhất vì tam giác này không đều cũng không cân.

“Lần này không dễ gấp cả ba cạnh cho thẳng hàng nhỉ”, Kino nhận xét.

“Có lẽ chúng ta nên thử gấp góc làm đôi như anh Yuji đã nói lúc nãy”, Ichiro đề nghị.

Cậu ấy gấp dọc theo đường phân giác của các góc và ngay lập tức bài toán tự nhiên được giải.

“Nhìn xem này”, cậu gọi các bạn.



Chúng kiểm tra tờ giấy của Ichiro và nhận thấy có tổng cộng bốn nếp gấp, trong đó ba nếp dọc theo ba đường phân giác, còn nếp gấp thứ tư là dọc theo đường vuông góc kẻ từ giao điểm các đường phân giác xuống một cạnh của tam giác.

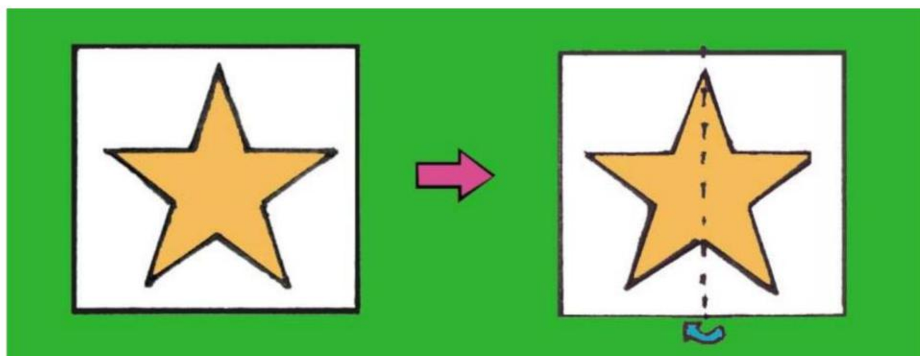
“Hay quá”, Jai nói. “Nếu đường gấp thứ tư dọc là theo đường kẻ vuông góc xuống một cạnh khác thì có được không nhỉ?”.

Ba bạn thử sử dụng hai cạnh còn lại, và vẫn ra lời giải đúng. Chúng khám phá ra rằng cách gấp không phải là duy nhất.

Yuji quan sát bọn trẻ và nói: "Các em có một phong thái đúng với toán học, các em đã đặt các câu hỏi thích hợp và tìm kiếm các lời giải khác".

Ba cậu bé rất vui sướng vì được khen.

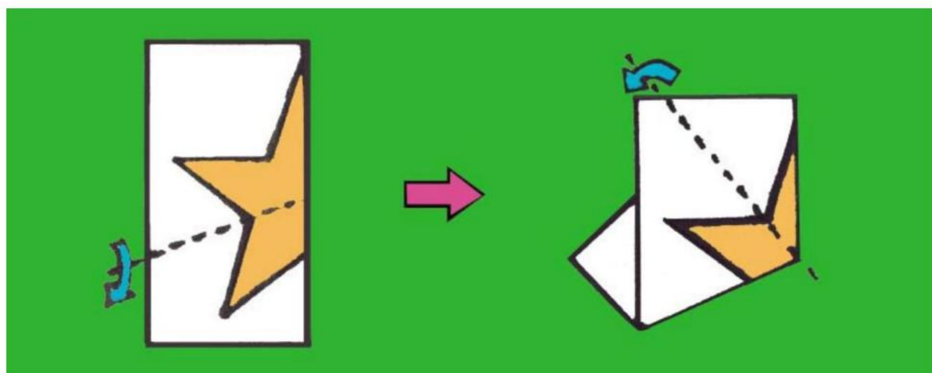
“Và tiếp theo, các em nhận thử thách này”, Yuji nói và đưa cho ba bạn trẻ ba tờ giấy có hình ngôi sao năm cánh.



Ba bạn quyết định cùng nhau giải.

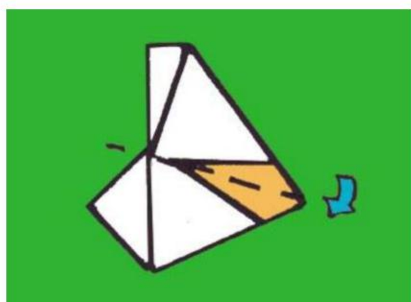
“Rồi, giờ ai có ý tưởng gì thì nói ra nhé”, Ichiro nói với hai bạn.

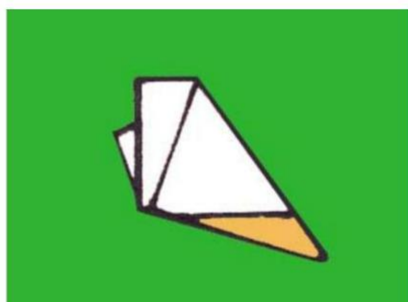
“Mình nghĩ nên gấp theo đường phân giác của góc ở đỉnh trên cùng, sao cho các cạnh bên trái và bên phải xếp trùng lên nhau”, Jai đề xuất.



Chúng chăm chú nhìn vào tờ giấy đã được gập đôi lại theo đề xuất của Jai một lúc.

"Mình biết rồi, mình biết rồi", Ichiro reo lên đầy phấn khích. "Chúng ta có thể chồng hai đỉnh của hình lên nhau bằng cách gấp như thế này". Cậu ấy cầm tờ giấy và gấp theo một đường.





"Sau đó, nếu gấp hai lần nữa thì các cạnh sẽ được xếp thành một hàng", Jai nói tiếp lời Ichiro.

Kino cắt tờ giấy đã gấp bằng một nhát kéo và thế là hình ngôi sao rơi ra từ tờ giấy.

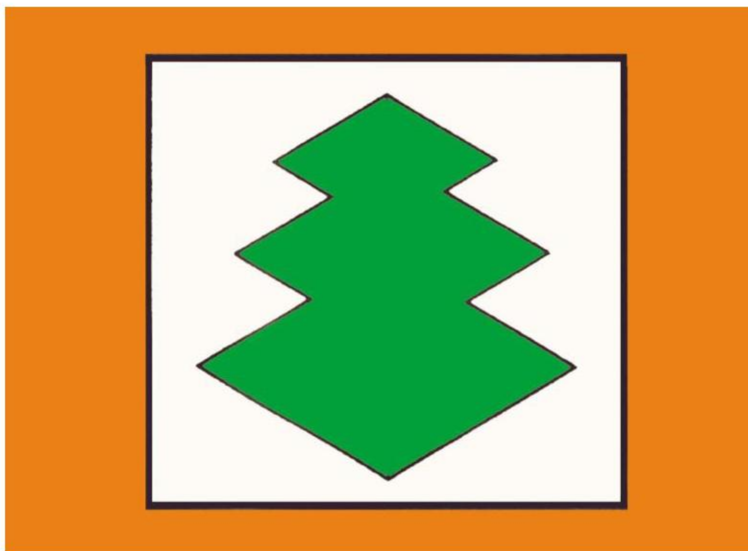


“Chúng em làm được rồi!”. Ba bạn đưa cho anh Yoji xem hình ngôi sao được cắt ra từ tờ giấy.

“Các em làm tốt lắm”, anh ấy nói.

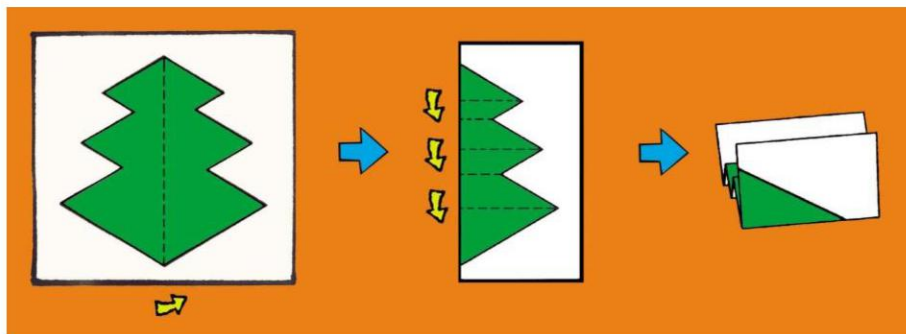
Những đứa trẻ khác nhìn ba cậu bé với một cảm xúc đan xen giữa ngưỡng mộ và ghen tị, vì ba cậu bé này đã làm nhanh hơn hẳn đám còn lại.

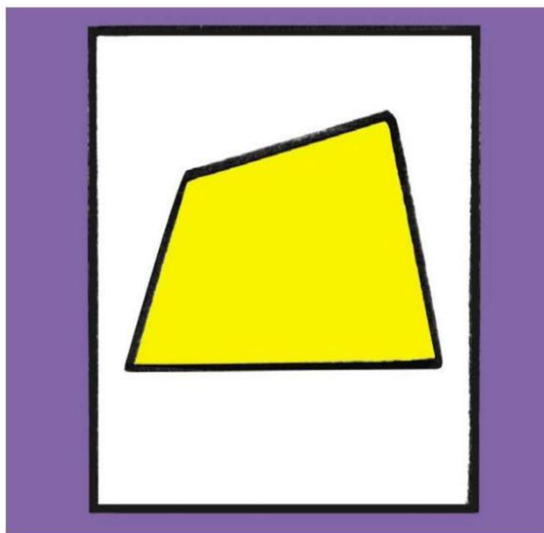
"Sẵn sàng cho bài tập tiếp theo chưa nào?," anh Yoji hỏi. "Rồi ạ", chúng trả lời.



Yoji đưa cho bọn trẻ tờ giấy có vẽ một hình huy hiệu cũ của Nhật Bản từ thời Edo[1]. Nó được gọi là *"cây ba tầng bishi"*.

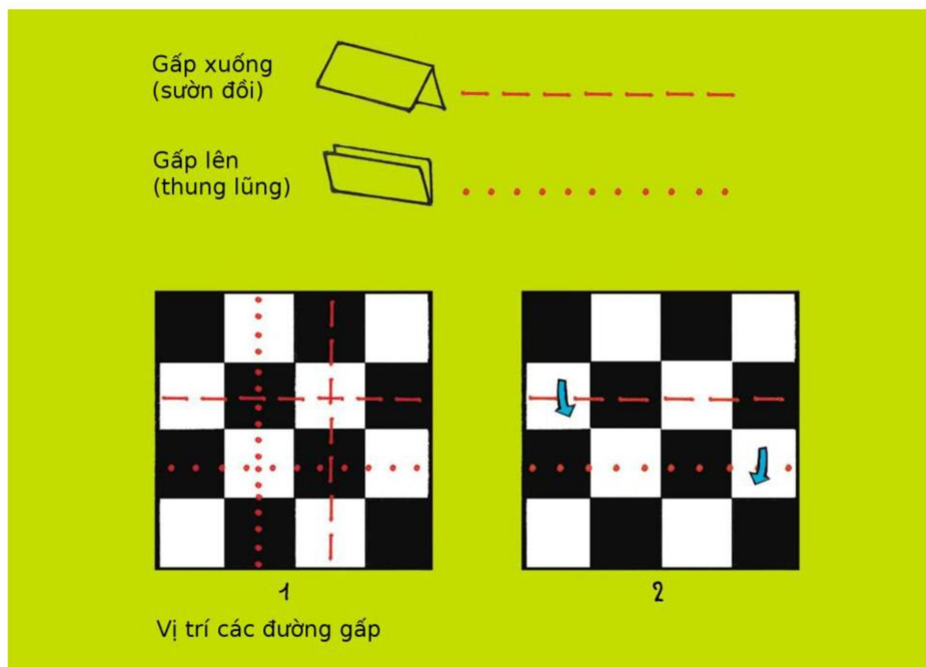
Lần này chúng phải suy nghĩ lâu hơn, nhưng cuối cùng cũng tìm ra lời giải, và điều đó làm cho bọn trẻ vô cùng vui sướng. Đây là cách giải của chúng.





Yoji ra một bài tập về nhà cho các cậu bé. Đó là tờ giấy có một hình thang.

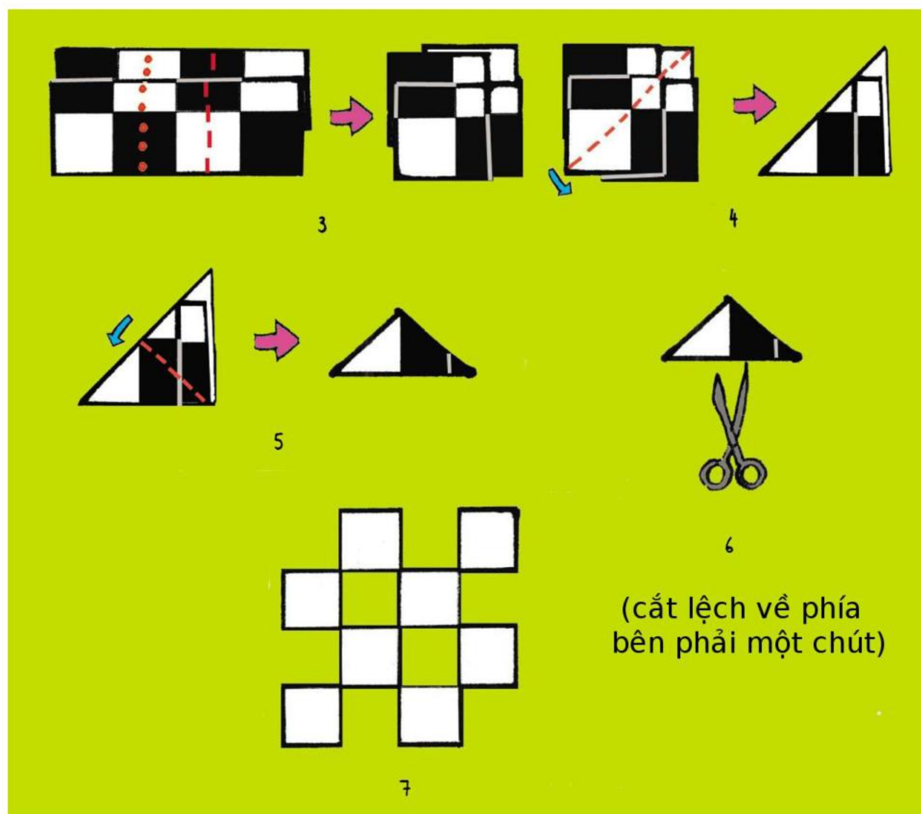
Sau khi tất cả các cô bé cậu bé ở trong phòng đã cắt được hình ngôi sao, Yuji nói: “Bây giờ các em đã có một chút kinh nghiệm về việc gấp và cắt bởi một đường kéo, nên anh sẽ chỉ cho các em thấy cách gấp và cắt một bàn cờ 4×4”.



Để mọi người dễ theo dõi, Yuji gấp chầm chậm từng bước một. Sau khi gấp xong, anh lấy kéo cắt một nhát, và toàn bộ các hình vuông màu đen rơi ra khỏi tờ giấy.

"Cái này có dùng được cho các bàn cờ có kích thước lớn hơn không anh', Jai hỏi.

"Nếu số ô vuông ở mỗi cạnh của bàn cờ là số chẵn thì dùng được cách này em ạ. Còn nếu là số lẻ thì phải thay đổi cách gập một chút". Yuji trả lời.



"Thích quá, trò này vui ghê", Kino nói. Jai thì tự đặt trong đầu một thử thách mới: giải trường hợp bàn cờ 3×3.

Ba cậu bé chân thành cảm ơn anh Yuji đã đem lại cho chúng những bài toán thật thú vị, và sau đó rời khỏi căn phòng.



Chương 13 Trò chơi xếp hình từ hình tứ diện



Các cậu bé cảm thấy sự náo nhiệt phát ra từ một căn phòng. Chúng đi về hướng phát ra tiếng ồn, và gặp lại chị hướng dẫn viên đầu tiên Keiko.

“Các em đến thật đúng lúc. Giáo sư Yamaaki đang ở đây. Ông ấy là người đã thu thập tất cả các mẫu hình trong Thế giới Toán học Kỳ diệu. Các em có thể vào phòng nghe giáo sư giải thích về các mô hình”. Keiko nói với ba cậu bé.

Ba cậu bé tìm được chỗ ngồi ở phía trước giữa đám đông các bạn trẻ để nghe giáo sư Yamaaki giảng giải. Tất cả mọi người đều đang tập trung sự chú ý vào một người có mái tóc hoa râm bồng bềnh, bộ râu trông giống như một nhà hiền triết Trung Quốc, và phía trên trán quấn một cái băng đô nhiều màu sắc.

Giáo sư Yamaaki tỏ ra rất thân thiện và cười đùa với các em nhỏ đứng xung quanh.

“Hôm nay tôi có nhiều thứ muốn cho các bạn nhỏ thấy”, ông nói.

“Giáo sư trông có vẻ quen ghê”. Ichiro thì thầm với các bạn. “Tớ nghĩ là đã từng gặp ông ấy trước đây rồi, nhưng không nhớ được là gặp ở đâu”.

“Các bạn có biết Escher không?”. Giáo sư Yamaaki hỏi.

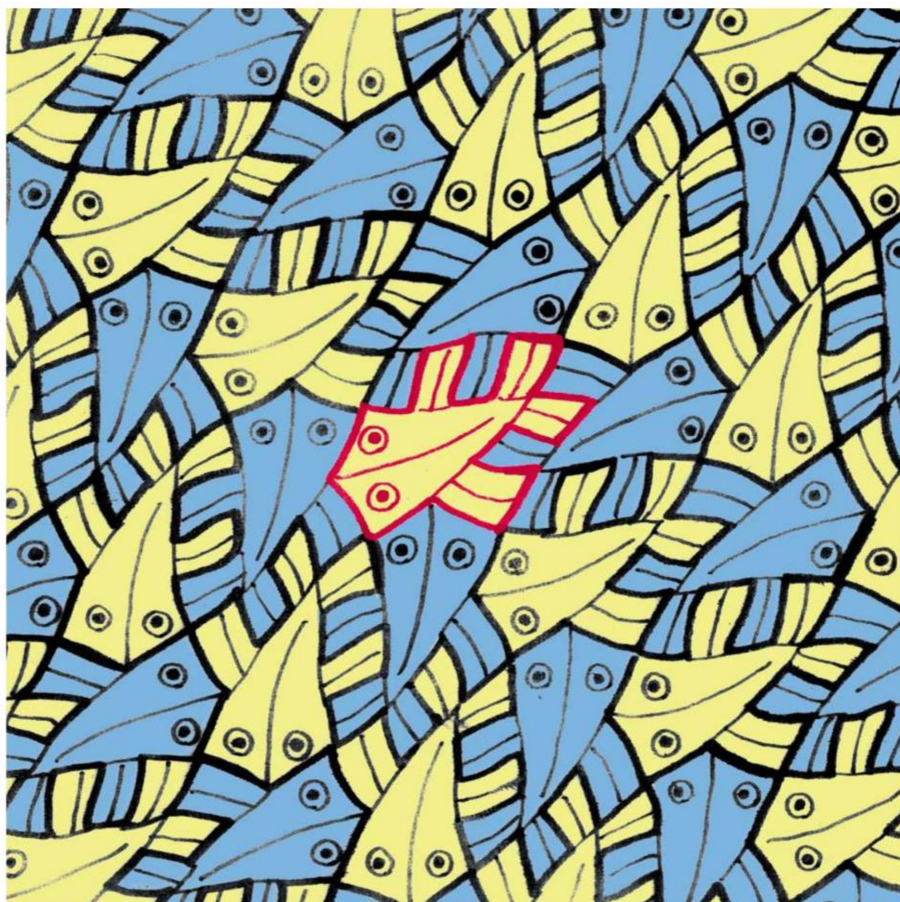
Hầu hết các bạn trẻ lắc đầu, nhưng Ichiro lại biết. Cậu giơ tay lên và nói:

“Ông ấy là một họa sĩ nổi tiếng ạ”.

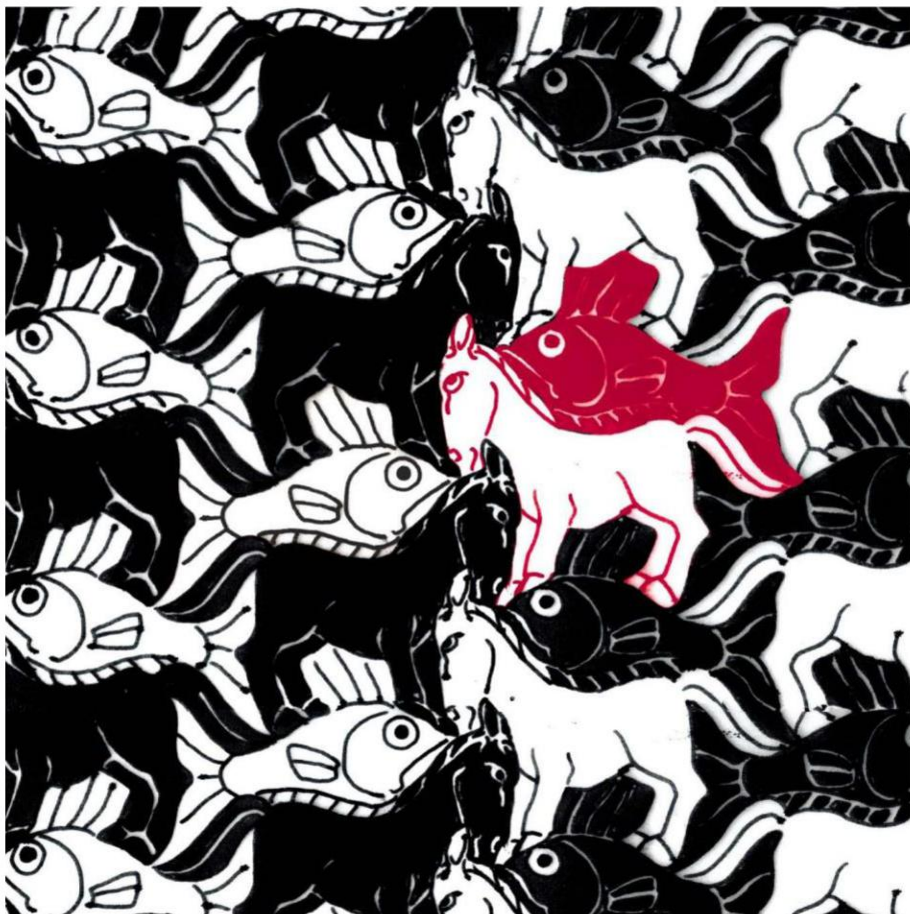
“Làm sao mà cậu biết vậy?”. Kino hỏi riêng.

“Mẹ tớ đã cho tớ xem một cuốn sách về các tác phẩm của ông ấy”. Ichiro trả lời. Ichiro bị cuốn hút bởi cách kết hợp các khối hình và các phép biến đổi trong tác phẩm của Escher.

“Đúng vậy!”. Giáo sư Yamaaki nói. Ông cho mọi người xem một số bản sao các tác phẩm của Escher.



"Tác phẩm này được tạo thành bởi một hình hoa văn được xếp kín trên mặt phẳng như lát gạch. Các bạn để ý xem những miếng hoa văn được xếp sao cho không có một kẽ hở nào, cũng như không có sự chồng chéo các phần lên nhau". Giáo sư Yamaaki tiếp tục.



"Kiểu lặp đi lặp lại một mô hình để phủ kín mặt phẳng như vậy được gọi là kiểu *lát gạch*". Ông nói.



"Nó giống như một trò chơi ghép hình mà các mảnh đều có cùng một hình dạng vậy". Jai phát biểu.

"Cậu bé quan sát thật là tốt". Giáo sư Yamaaki nói.

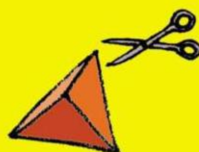
"Hôm nay tôi sẽ thử biến các bạn thành họa sĩ Escher nhé", ông tuyên bố.

Giáo sư Yamaaki lấy ra một hình khối bằng giấy.



“Hãy nhìn khối hình này, nó có bốn mặt và các mặt là các hình tam giác đều có cùng kích cỡ. Nó được gọi là một tứ diện đều.”

Ở trên bàn bên cạnh giáo sư có rất nhiều hình tứ diện đều. Các hướng dẫn viên đã làm sẵn trước đó, và đưa cho mỗi bạn một hình tứ diện, cùng với một con dao cắt giấy, một cái kéo, một tờ giấy to và hồ dán. Ba cậu bé nhận lấy những hình tứ diện có màu sắc tươi sáng. Chúng xoay hình tứ diện để ngắm nghía các mặt có hình tam giác đều.









"Các bạn thân mến, tôi muốn các bạn cắt mặt của hình tứ diện một cách thận trọng, sao cho nó không bị đứt thành hai mảnh, và sao cho có thể trải phẳng nó ra trên mặt bàn". Giáo sư Yamaaki hướng dẫn cho mọi người.

"Phải làm như thế nào ạ?". Kino hỏi.

Giáo sư Yamaaki cắt một hình tứ diện để minh họa. "Thủ thuật là cắt xuyên qua các đỉnh của hình tứ diện".

"Các bạn sẽ thấy hình tứ diện của các bạn có nhiều lớp, mỗi lớp có một màu khác nhau". Ông nói tiếp.

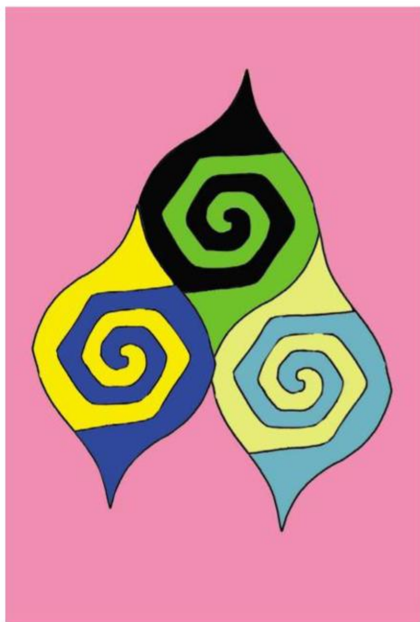
Khi giáo sư Yamaaki cắt xong, các lớp giấy với các màu khác nhau cũng được cắt với cùng một hình dạng. Ông trải rộng các lớp giấy màu vừa cắt lên một tấm bảng, rồi biểu diễn xếp chúng khít vào với nhau như chơi xếp hình.



"Các bạn hãy cắt theo bất cứ kiểu nào mà các bạn muốn, miễn sao nó liền một mảnh và trải phẳng ra được". Giáo sư Yamaaki nhắc lại. "Các bạn sẽ xếp được các lớp giấy khít vào nhau như là lát gạch".

"Sau khi cắt xong, hãy dán những mảnh giấy ấy lên tờ giấy to. Thử hoàn thành tác phẩm của mình xem".

Bọn trẻ rất hăng hái cắt dán để làm ra tác phẩm. Ichiro cắt một hình rô-bốt cầu kì. Jai thì làm xoắn xoắn giống hình con ốc. Kino thì cắt một hình đơn giản để cho dễ xếp, vậy là được rồi.



con ốc của Jai



thuyền buồm của Kino

Giáo sư Yamaaki đi một vòng quanh các bạn nhỏ. Những tác phẩm tốt sẽ được giáo sư đưa lên cho các bạn cùng xem. Mọi người đều vỗ tay khi nhìn thấy những con rô-bốt của Ichiro.



"Đây chính là một trong những khám phá mới nhất của tôi". Giáo sư nói. "Dù cắt bề mặt hình tứ diện kiểu gì, miễn sao nó liền một mảnh

và trải phẳng ra được, thì sẽ lát được mặt phẳng bằng hình nhận được".

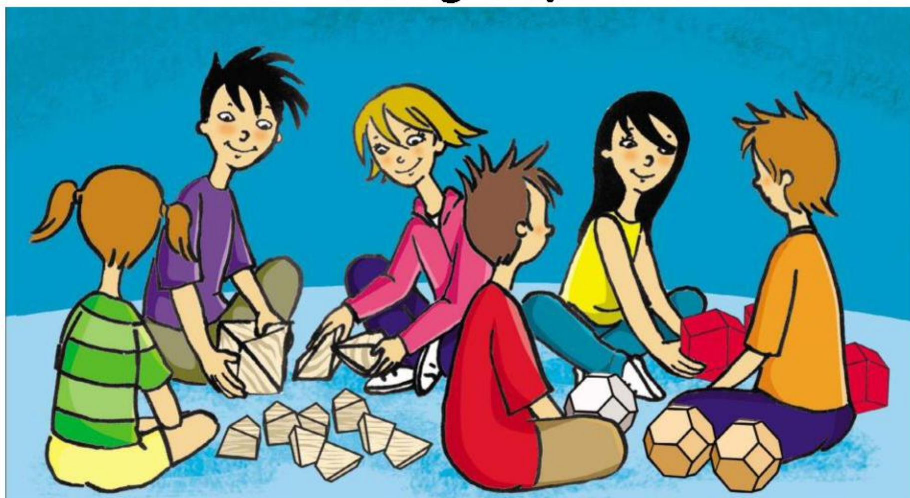


"Điều đó có nghĩa là chúng ta tha hồ thiết kế các kiểu khác nhau!". Ichiro nói.

"Nhưng chúng ta phải làm hình tứ diện đều trước đã", Kino nhắc. Jai thì đã nghĩ đến những hoa văn mà cậu sẽ làm thử khi về nhà.



Chương 14 Những khối hình đơn nhiệm và lưỡng nhiệm



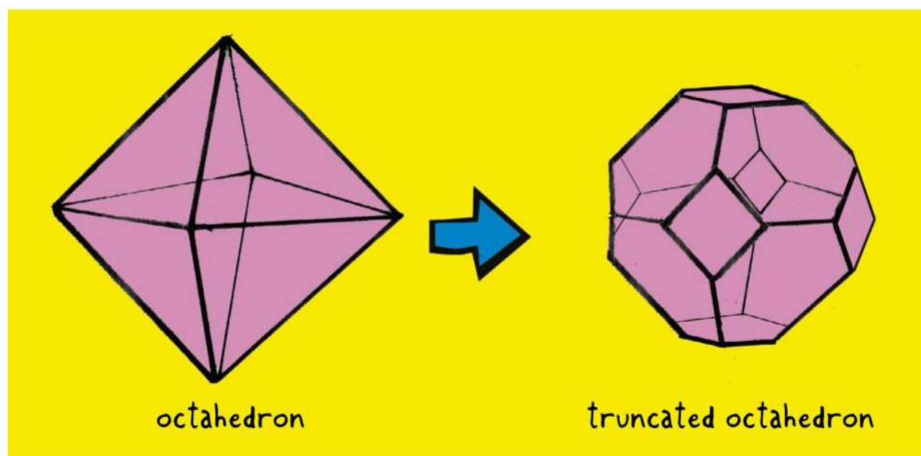
Các bạn nhỏ đi theo giáo sư Yamaaki sang một căn phòng khác. Trên sàn nhà có những khối gỗ lớn. Vài đứa trẻ đã ở sẵn trong phòng,

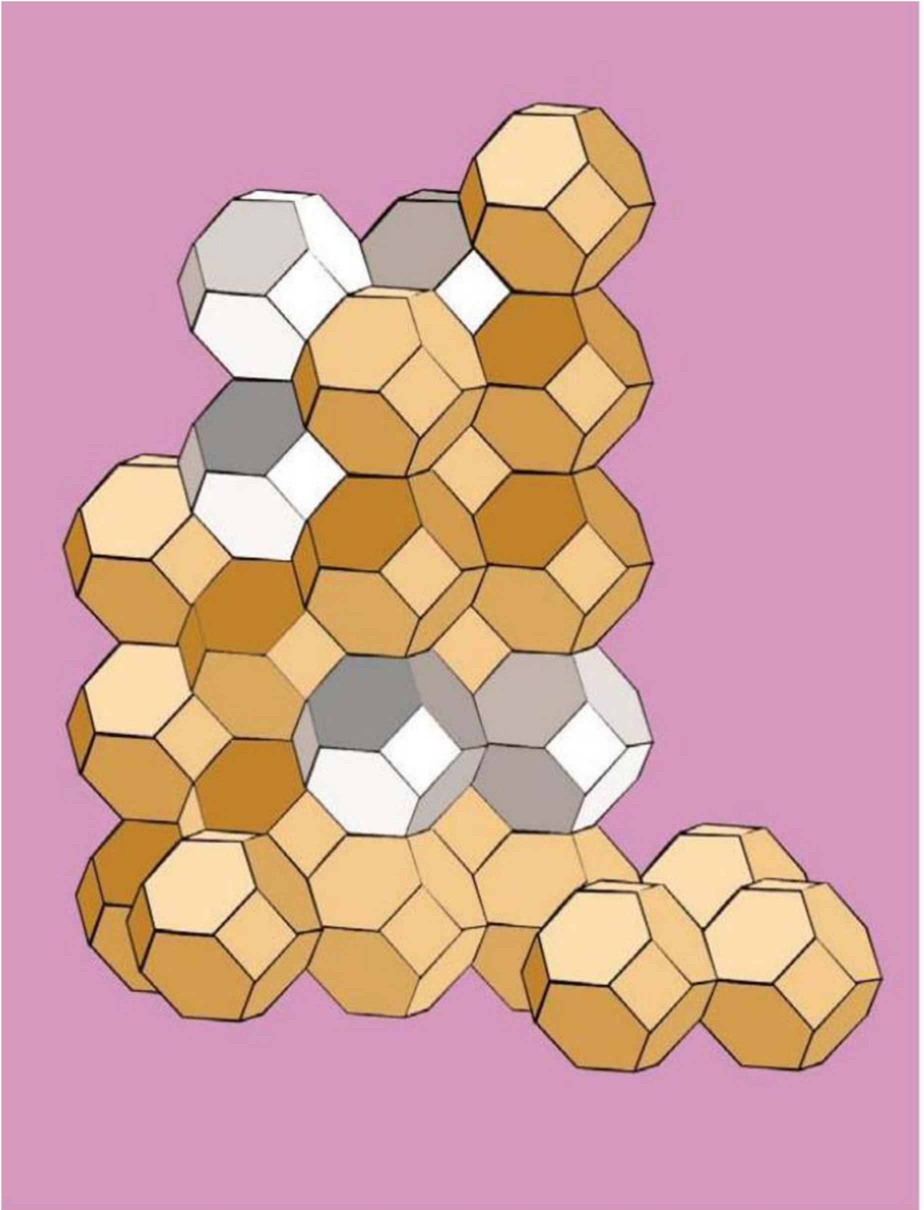
đang cố gắng xếp các khối gỗ khít vào với nhau, như một trò chơi lắp hình ba chiều.

“Ở phòng lúc nãy, tôi đã giới thiệu cho các bạn một cách lát gạch trên mặt phẳng. Các bạn cũng có thể lấp đầy không gian tương tự như là lát gạch vậy”. Giáo sư Yamaaki nói.

“Hãy nhìn các bạn nhỏ ở đằng kia, các bạn ấy đang làm như vậy đấy”.

Giáo sư Yamaaki đi đến nhóm các bạn nhỏ đang chơi với các khối gỗ ở trên sàn và nhặt lên một khối gỗ.



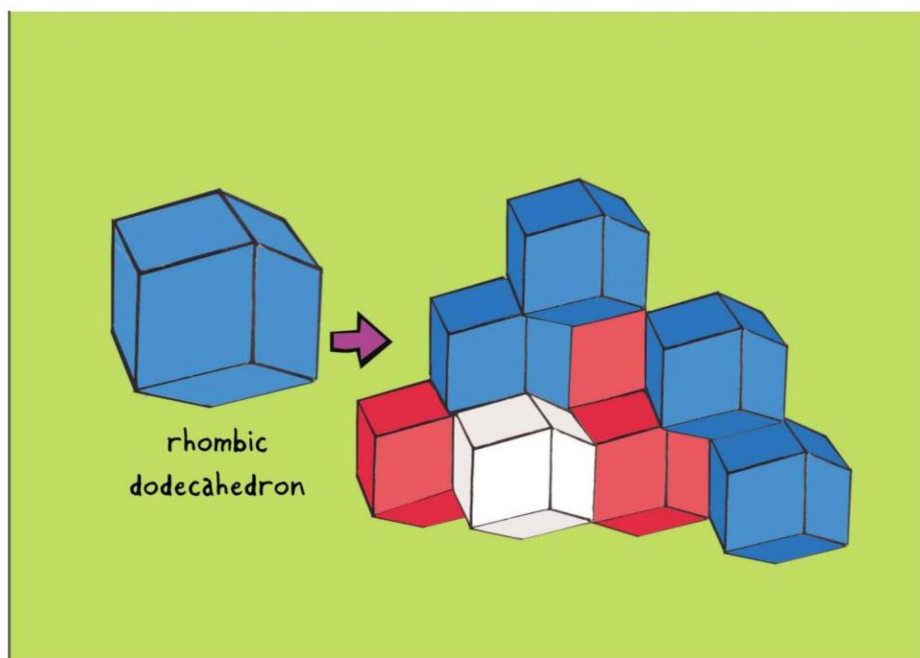


"Đây là một khối bát diện cụt. Nó có 14 mặt bao gồm 8 mặt lục giác đều và 6 mặt hình vuông". Giáo sư tiếp tục giảng. "Các bạn có thể tạo ra nó bằng cách cắt đi 6 đỉnh của khối bát diện đều".

Giáo sư đưa ra khối hình bát diện và làm vài động tác mô tả việc cắt các đỉnh của nó.

"Khối hình bát diện cụt là một hình *lấp kín không gian*, tức là bạn có thể lấp đầy không gian ba chiều bằng những hình bát diện cụt này, sao cho không có kẽ hở và cũng không có sự chồng chéo lên nhau".

Giáo sư lấy một khối hình khác.



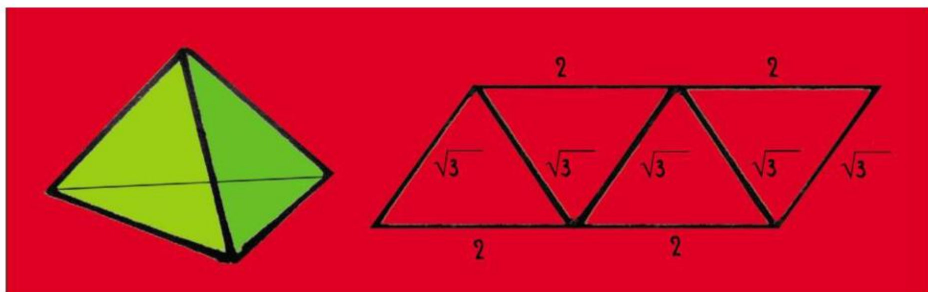
"Đây là khối thập nhị diện hình thoi. Nó có 12 mặt, mà mỗi mặt là một hình thoi. Nó cũng là một hình lấp kín không gian. Ngoài ra còn nhiều hình khác nữa cũng lấp kín không gian".

Giáo sư chuyển sang một nhóm các hình khối khác. "Những hình khối này cũng lấp kín không gian, nhưng chúng rất đặc biệt. Chúng không chỉ lấp kín không gian, mà còn có thể cắt bề mặt của chúng dọc theo một số cạnh rồi trải phẳng ra thành một hình đa giác có tính chất lát kín mặt phẳng. Chúng ta sẽ gọi những hình khối như vậy là những hình khối *lưỡng nhiệm*.

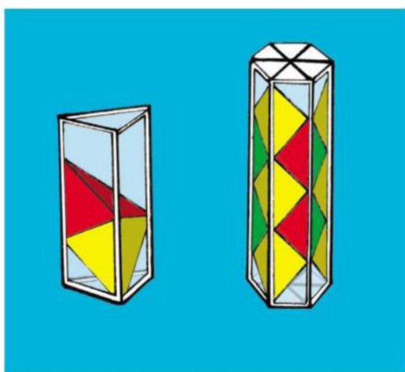
“Cái tên ngộ phết, và cũng dễ nhớ”, Ichiro nói. “*Lưỡng nhiệm* bởi vì làm được hai việc: chúng lấp kín được không gian ba chiều còn bề mặt của chúng khi trải phẳng ra lát kín được mặt phẳng".

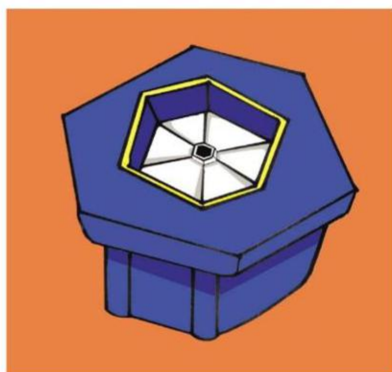
"Vậy thì những hình khối lấp kín không gian ba chiều nhưng bề mặt khi trải phẳng ra không lát kín mặt phẳng phải gọi là *đơn nhiệm*", Kino nhận xét.

“Tôi cũng sẽ gọi chúng như vậy nhé”. Giáo sư Yamaaki nó khi nghe các cậu bé trao đổi với nhau. “Các bạn nhỏ, chúng ta hãy gọi hình khối lấp kín không gian là hình khối đơn nhiệm nhé.”



"Có một ví dụ về hình khối lưỡng nhiệm trông rất giống như các hộp giấy tứ diện tetrapak[1] dùng để đựng sữa và nước quả. Nó là một hình tứ diện mà mặt là các hình tam giác cân với tỷ lệ các cạnh là $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ ".



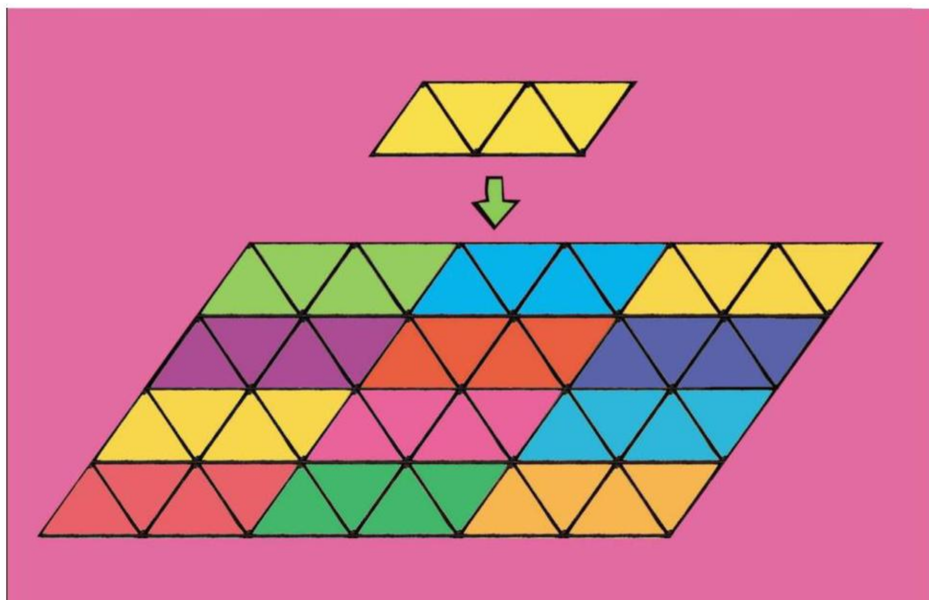


“Xem này, có thể xếp chồng các tứ diện này lên nhau thành hình trụ có đáy là tam giác đều. Rồi các hình trụ này có thể xếp vào với nhau

thành hình trụ có đáy là lục giác đều. Đây chính là cách người ta xếp các hộp tetrapak để chuyên chở".

Giáo sư lấy một hình tứ diện tetrapak bằng giấy, cắt theo ba cạnh rồi ép phẳng ra thành một hình bình hành.

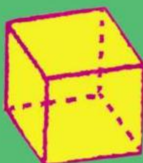
"Tất nhiên là hình này có thể lát kín mặt phẳng", ông nói và cho mọi người xem xếp lát gạch.



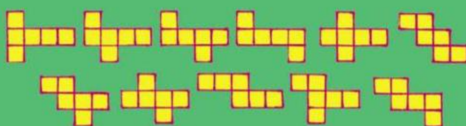
"Tất nhiên, hình lập phương cũng là một hình khối lưỡng nhiệm. Nếu bạn cắt bề mặt của nó theo một số cạnh rồi mở phẳng ra được thành một hình đa giác nào đó, thì hình đa giác đó luôn lát kín mặt phẳng".

Giáo sư dẫn mọi người đến tấm áp phích có ghi lời giải thích.

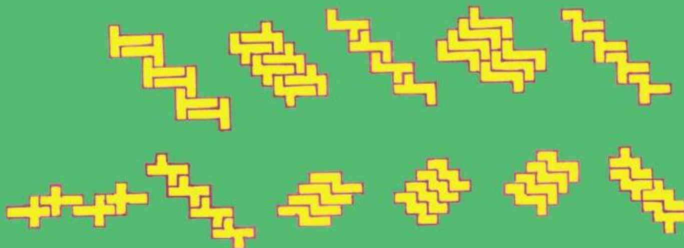
Lát mặt phẳng bằng các mặt trùm của một khối lập phương



Dưới đây là tất cả các hình mặt trùm của một khối lập phương



Một **mặt trùm** của một khối đa diện là một hình đa giác có thể gấp lại vừa khít thành đúng một lớp toàn bộ bề mặt của khối đa diện, sao cho các cạnh của hình đa giác trở thành các cạnh của khối đa diện chứ không nằm bên trong các mặt. Từ tiếng Anh để chỉ mặt trùm là **net** ("mặt lưới"), từ tiếng Pháp là **patron** ("ông bầu, ông trùm").



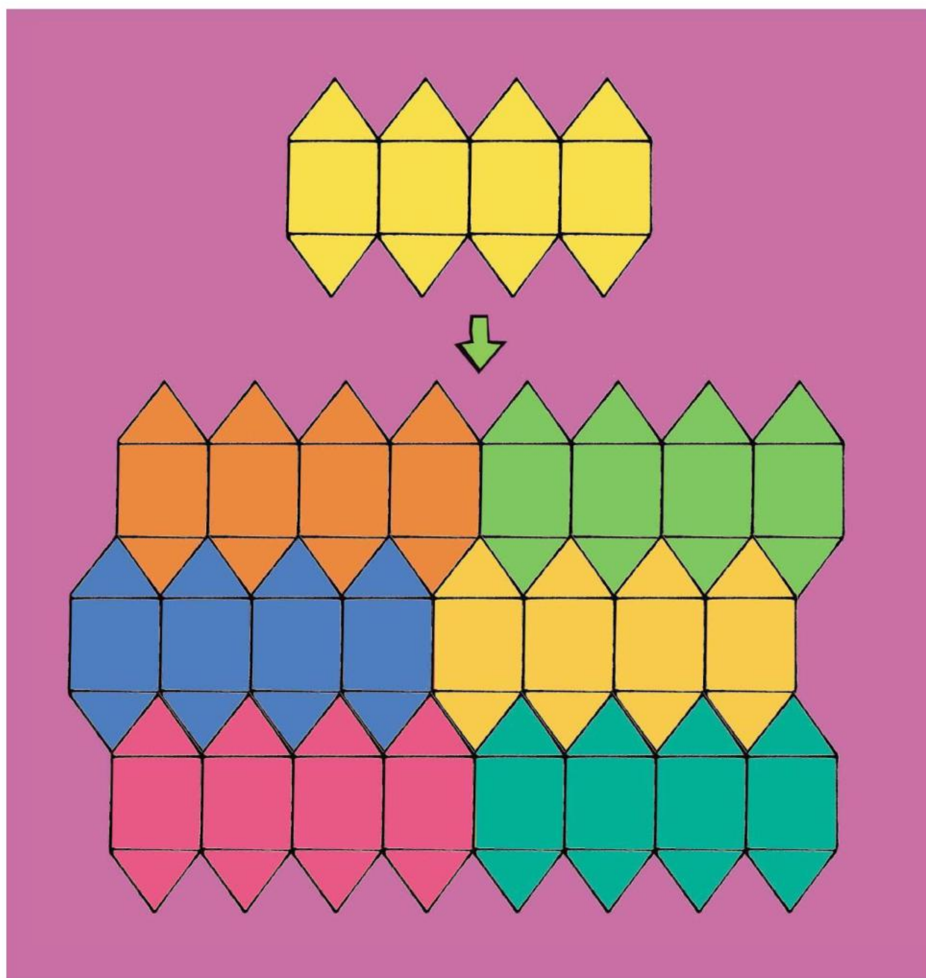
Các mặt trùm giống nhau của một khối lập phương có thể dùng để lát mặt phẳng



Giáo sư nhặt lên một mô hình mẫu khác bằng gỗ.

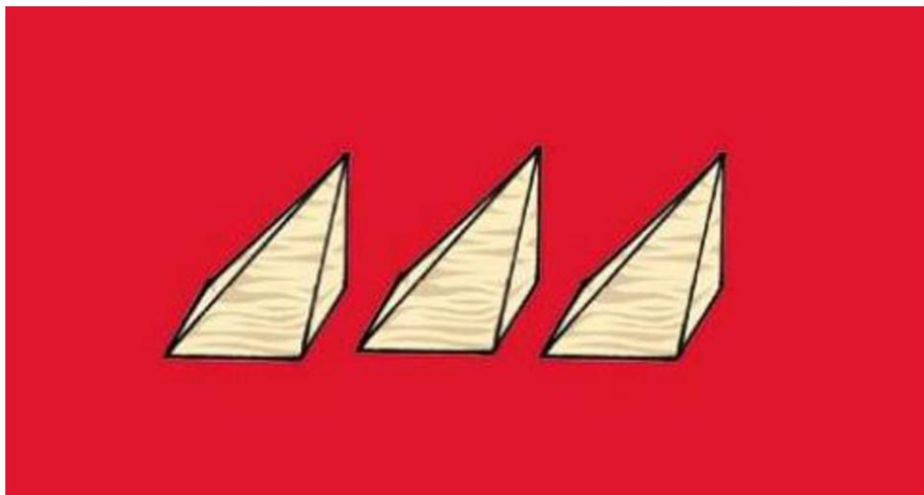
“Có vô số hình khối lưỡng nhiệm khác nhau, nhưng trong số những hình đã biết thì hình thập nhị diện này có nhiều mặt nhất. Nó giống như hình lập phương có thêm hai khối hình chóp đính ở hai mặt đối diện”.

Một lần nữa, giáo sư cắt mô hình của khối thập nhị diện bằng giấy, trải phẳng nó ra, và biểu diễn xếp kiểu lát gạch trên mặt phẳng.



“Biết đâu mình cũng có thể tìm ra một hình khối lưỡng nhiệm mà chưa từng được khám phá ấy nhỉ?”, Jai nghĩ như vậy và cảm thấy muốn tìm hiểu sâu hơn.

Trong khi giáo sư đi vòng xung quanh phòng và nói chuyện với các bạn nhỏ thì ba cậu bé đi xem những hình đơn nhiệm và đa nhiệm được trưng bày trong phòng.



Trên một cái bàn có để ba hình chóp xiên trông giống hệt nhau, có đáy là hình vuông và bốn mặt bên là những tam giác vuông. Các cậu bé nhìn thấy một ghi chú trên bàn

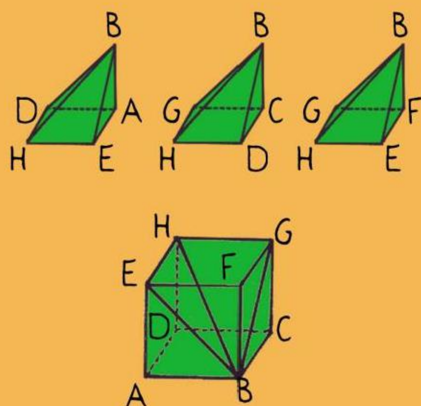
Ba mảnh này có thể lắp ráp thành một hình lập phương.

“Chúng mình thử làm đi”, Kino nói.

Các cậu bé ráng sức suy nghĩ để ghép thành một hình lập phương.

Ichiro nảy ra một ý tưởng. “Vì mặt đáy là hình vuông cho nên nó sẽ là một mặt của hình lập phương.”

Với ý tưởng này, chúng đã có thể giải được bài toán.



“Vì các mảnh giống nhau này ghép thành một hình lập phương, cho nên đây phải là hình khối đơn nhiệm”, Jai nói.

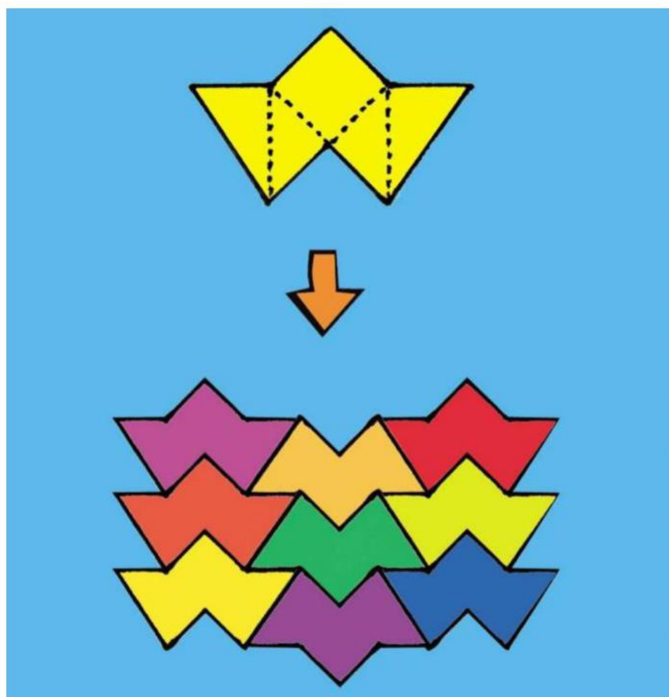
“Hình khối đơn nhiệm nghĩa là gì?”, một người hướng dẫn viên tên là Masao hỏi bọn chúng.

“À, đó là một cái tên mà chúng em nghĩ ra cho các hình khối lấp kín không gian ấy mà”, Kino trả lời.

“Thực ra không chỉ có vậy”, Masao nói. "Hình khối này cũng có một mặt trùm lát kín được mặt phẳng. Các em có thể tìm ra mặt trùm đó không?".

Anh ấy đưa cho bọn trẻ tờ giấy và mấy cái bút chì. “Lần theo các mặt của khối hình, các em thử cố gắng tìm cách lát gạch xem”, Masao đưa ra thử thách cho bọn trẻ.

Bài toán không dễ chút nào. Chúng vẽ ra được nhiều mặt trùm khác nhau và loại trừ dần. Cuối cùng chúng tìm được miếng gạch lát.



“Tốt lắm!” Masao nói khi anh kiểm tra lời giải.



Trên một cái bàn khác, có nhiều khối hình giống nhau với hình dạng khác thường. Mỗi khối hình có 6 mặt, và mỗi mặt là một tứ giác.

"Hình khối này thật là đặc biệt phải không", Masao nói. "Một người thợ mộc sau khi xem chương trình ti vi của giáo sư Yamaaki về các hình khối lấp kín không gian đã gửi đến cho ông nhiều khối hình này".

"Hình khối này có tên là gì ạ?" Kino hỏi.

"Nó chưa có tên. Các em có muốn đặt tên cho nó không?" Masao hỏi các cậu bé.

Ba cậu bé quây lại thành vòng tròn rồi bắt đầu thảo luận. Những từ liên quan được đưa ra là *carpenter* (thợ mộc), *six-sided* (sáu mặt), *quadrilaterals* (hình tứ giác) và *polyhedron (hình đa diện). Bọn chúng chọn một số chữ cái từ các từ đó:

carpenter six-sided quadrilaterals polyhedron

"Bọn em sẽ gọi nó là *c-squadron*", chúng nói với anh Masao.

"Từ bây giờ chúng ta sẽ gọi nó như thế nhé", anh Masao nói.

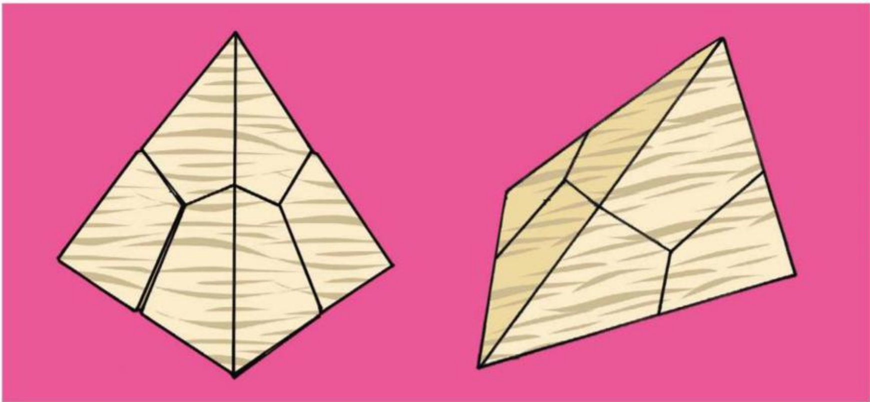
"Thế nó có phải là hình đơn nhiệm không ạ?", Ichiro hỏi.

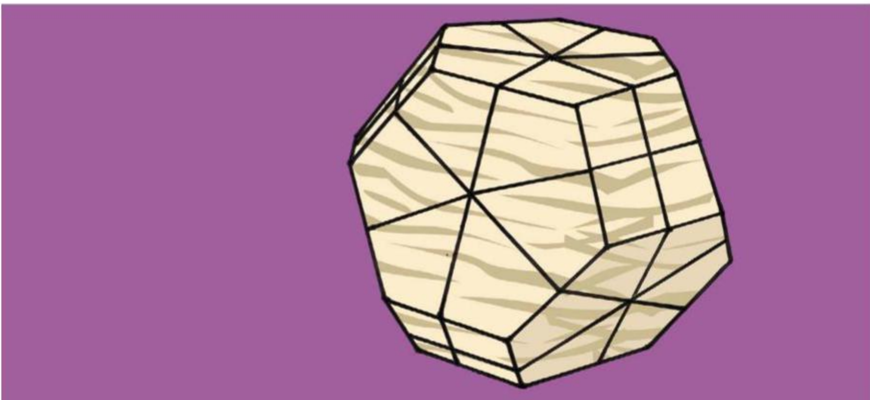
"Ừ, nó lấp kín không gian đấy", Masao trả lời.

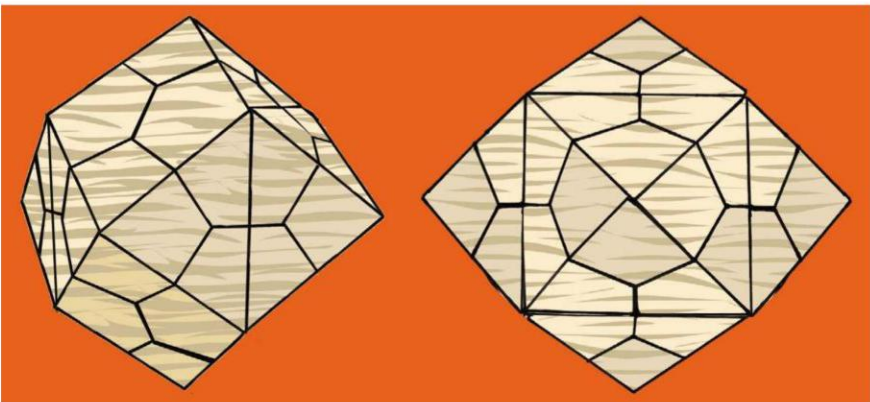
Anh ấy dẫn các cậu bé đến chỗ các khối hình được lắp ghép từ nhiều c-squadron. "Nhìn này, các em có thể xây dựng các hình khối lấp kín không gian khác từ chúng đấy."

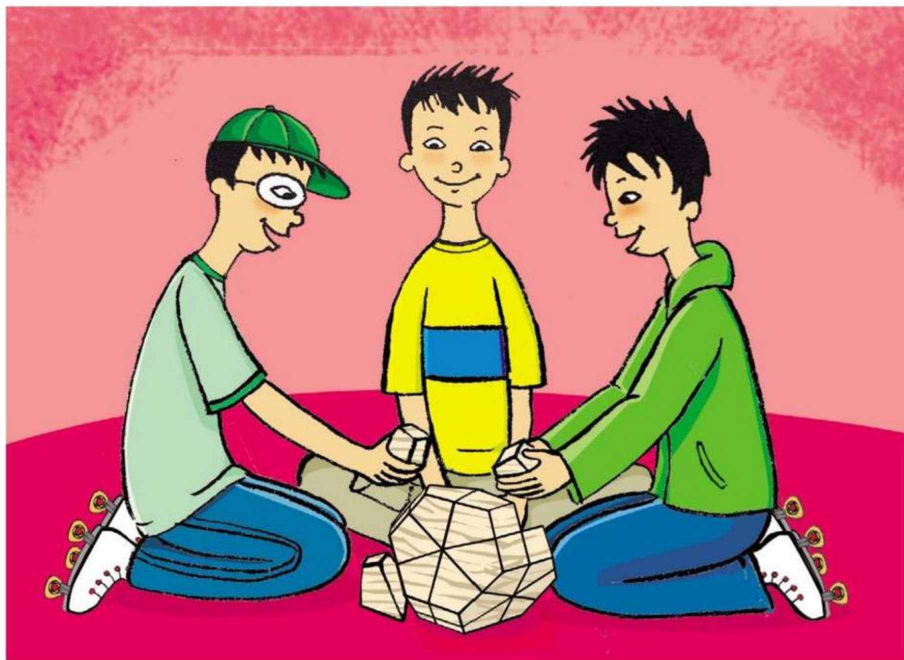
Bọn trẻ nhìn thấy một khối hình tetrapak, một khối hình bát giác cụt, và một khối thập nhị diện hình thoi.

"Các em có thể lắp ráp một hình hộp tetrapak bằng cách sử dụng bốn khối c-squadron đấy, hình bát giác cụt thì sử dụng hai mươi tư khối, còn khối thập nhị diện hình thoi thì dùng đến chín mươi sáu khối". Anh Masao nói thêm.









Các cậu bé dành thêm thời gian để cố gắng tạo ra các mô hình đã nhìn thấy.

Jai nghĩ mơ màng: "Khi mình tìm ra được một hình khối lưỡng nhiệm mới, mình sẽ gọi nó là *Jaihedron*".



Chương 15 Những khối hình đảo ngược







Giáo sư Yamaaki đi đến một cái bàn khác. Có một lăng kính tam giác với từ OPEN[1] được viết trên đó.

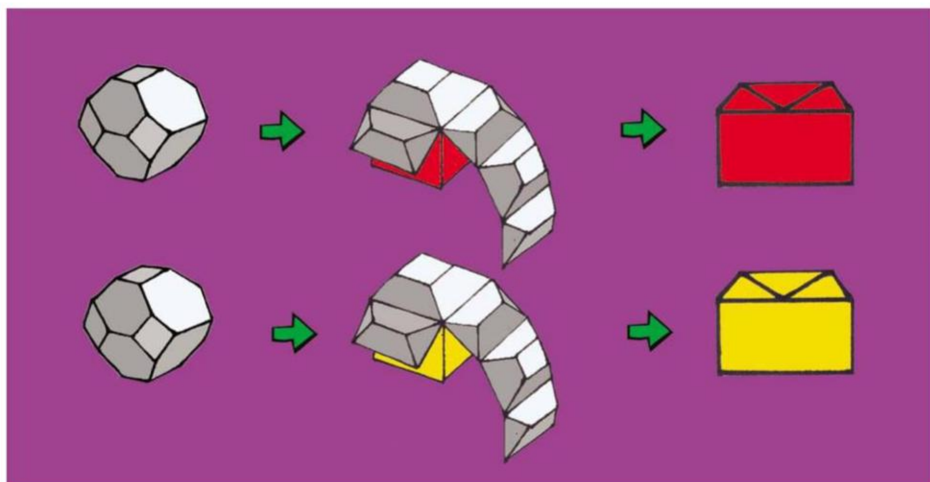
Giáo sư lấy ra từ cái bàn hai khối hình giống hệt nhau.

“Đây là khối bát diện cụt”. Ông ấy nói.

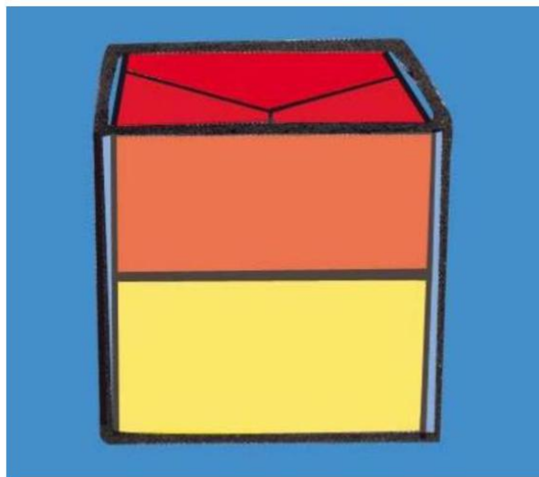
Sau đó giáo sư cầm một cái hộp nhựa.

“Tối muốn nhét hai khối hình bát diện cụt vào trong cái hộp này”.

Hầu hết bọn trẻ cảm thấy rằng đây là bài toán không giải được, bởi vì kích thước của hai hình bát diện cụt cộng lại quá lớn so với cái hộp. Và quả nhiên, những cố gắng đầu tiên của giáo sư để hai hình bát diện cụt vào hộp cũng không thành công.



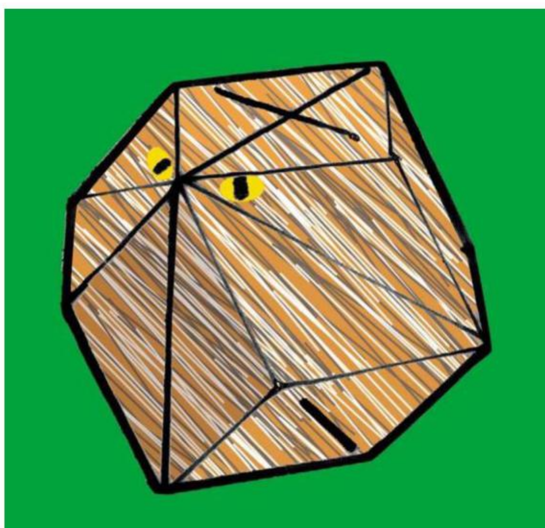
Sau đó, đột nhiên giáo sư Yamaaki lấy một khối hình bát diện cụt, men theo các mặt cắt, đảo ngược khối hình một cách nhanh chóng , biến đổi thành một hình viên gạch! Giáo sư làm tương tự với khối hình bát diện cụt còn lại. Bây giờ có thể đặt dễ dàng hai hình viên gạch vào trong cái hộp.



Ba cậu bé thấy thật là ấn tượng. Ai cũng vỗ tay hoan hô!

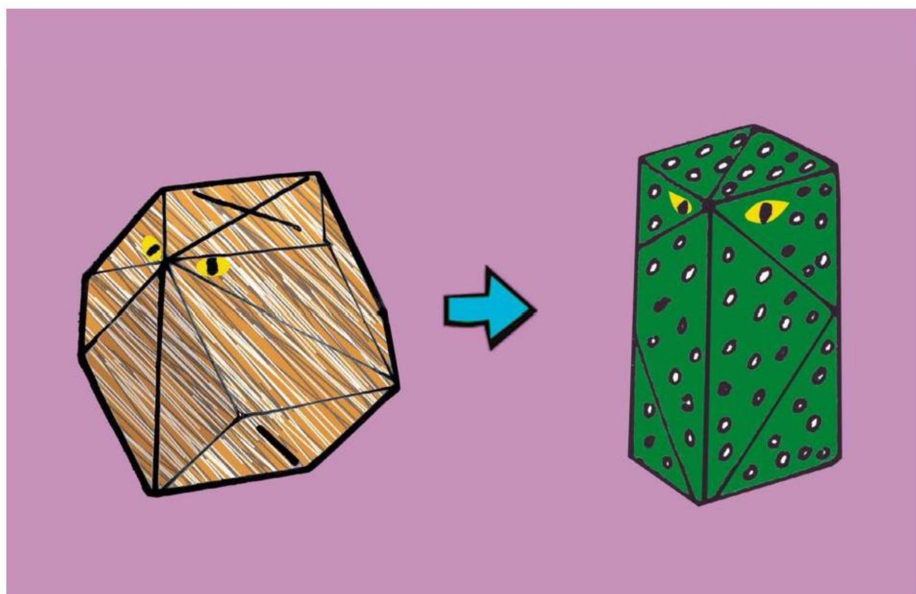
“Đôi lúc, để giải được một bài toán, các em phải thay đổi cách suy nghĩ của mình”, giáo sư nói.

Lại có thêm một điều nữa cho Jai ghi nhớ: "Có nhiều cách khác nhau để nhìn nhận một vấn đề”.



Tiếp theo, giáo sư lấy một khối hình được vẽ trông giống như một con cáo.

"Khối hình này là một khối thập nhị diện hình thoi, nhưng bây giờ chúng ta sẽ giả vờ nó là một con cáo", ông ấy nói.

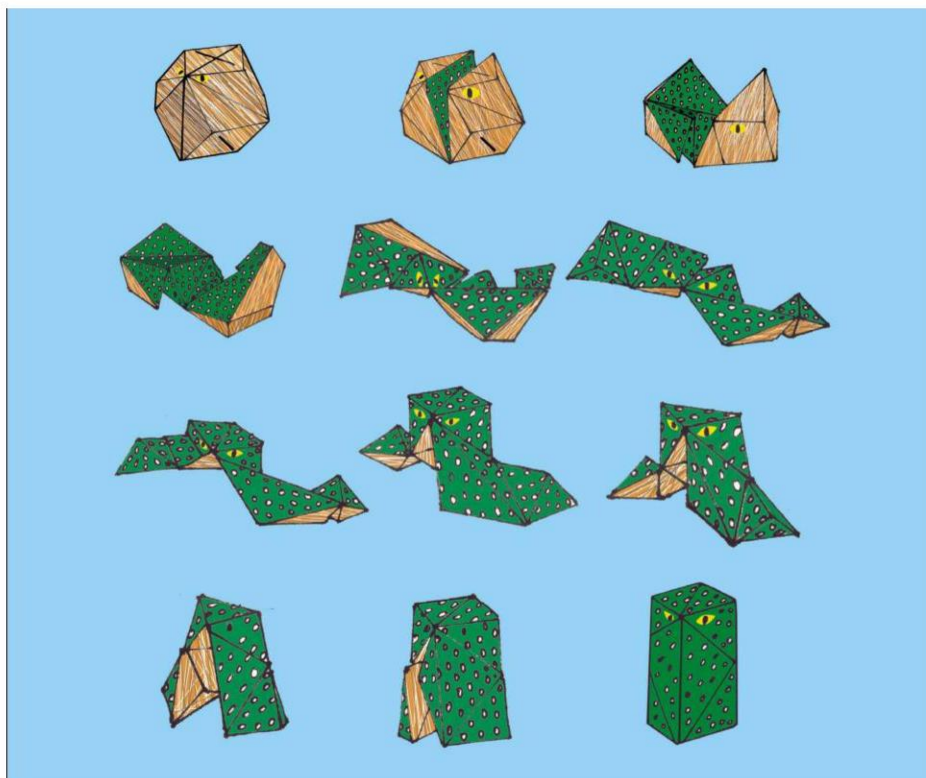


Giáo sư kéo một sợi dây và khối hình được lật ngược phần bên trong ra ngoài tạo thành một hình viên gạch được vẽ trông giống như một con rắn.

"Con rắn đã ăn con cáo mất rồi!". Giáo sư nói với một chất giọng đầy tinh nghịch.

"Ahhh..." bọn trẻ đồng thanh thốt ra một tiếng thở dài.

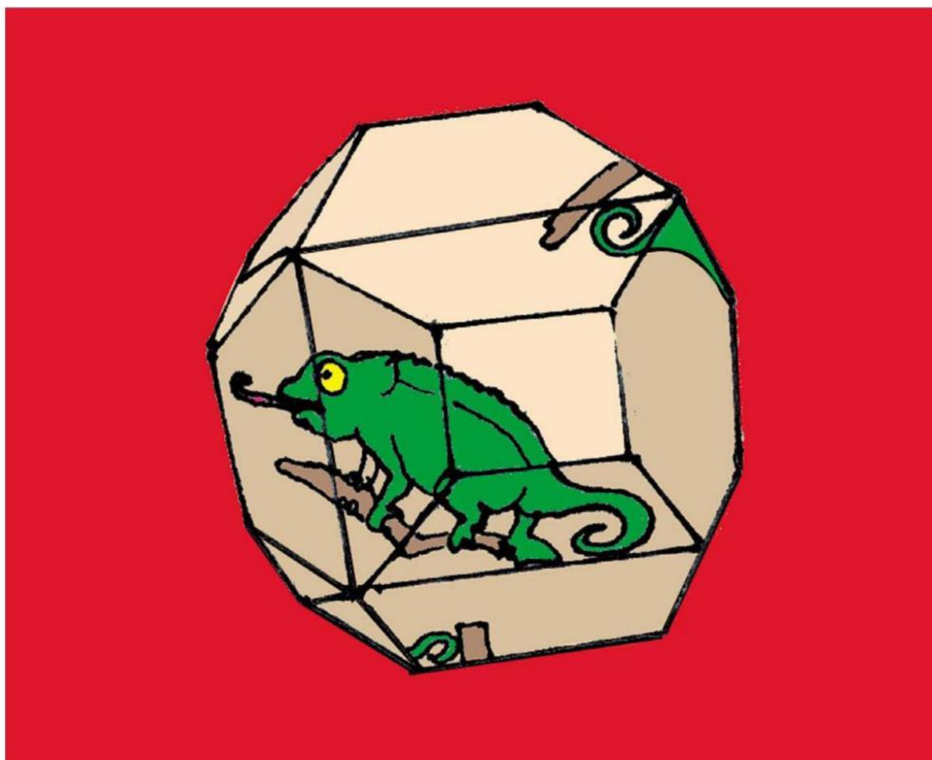
Giáo sư tiến hành làm lại mẹo lúc nãy một cách từ từ, từng bước một, để cho các bạn nhỏ có thể quan sát được điều gì đang xảy ra.



“Một vài khối hình được cắt theo cách đặc biệt và có thể đảo ngược mặt bên trong ra ngoài để tạo thành một khối hình khác. Tôi gọi chúng là những *khối hình đảo ngược*. Thỉnh thoảng chúng ta cũng có thể cắt và hoán đổi mặt trong với mặt ngoài của khối hình để cho ra một khối hình đồng dạng với khối ban đầu.”

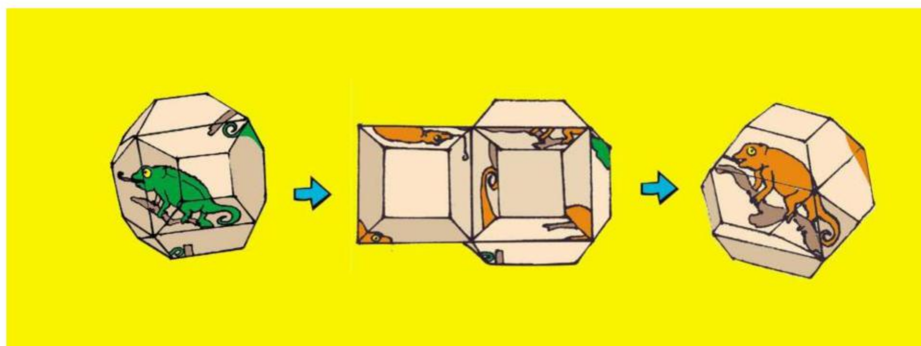
Giáo sư giới thiệu một khối hình khác, trên đó có vẽ những con kỳ nhông màu xanh lá cây.

“Đây là một khối bát diện cụt khác”, ông ấy nói.



Giáo sư lật mặt trong của khối hình ra ngoài, tạo thành một hình bát diện cụt khác. Lần này thì những con kỳ nhông màu da cam được vẽ lên đó.

"Đây là một ví dụ của những khối hình có thể lật mặt trong ra ngoài để tạo nên một khối hình đồng dạng với nó. Tôi gọi đây là những khối hình đảo ngược *kỳ nhông*", giáo sư nói tiếp.



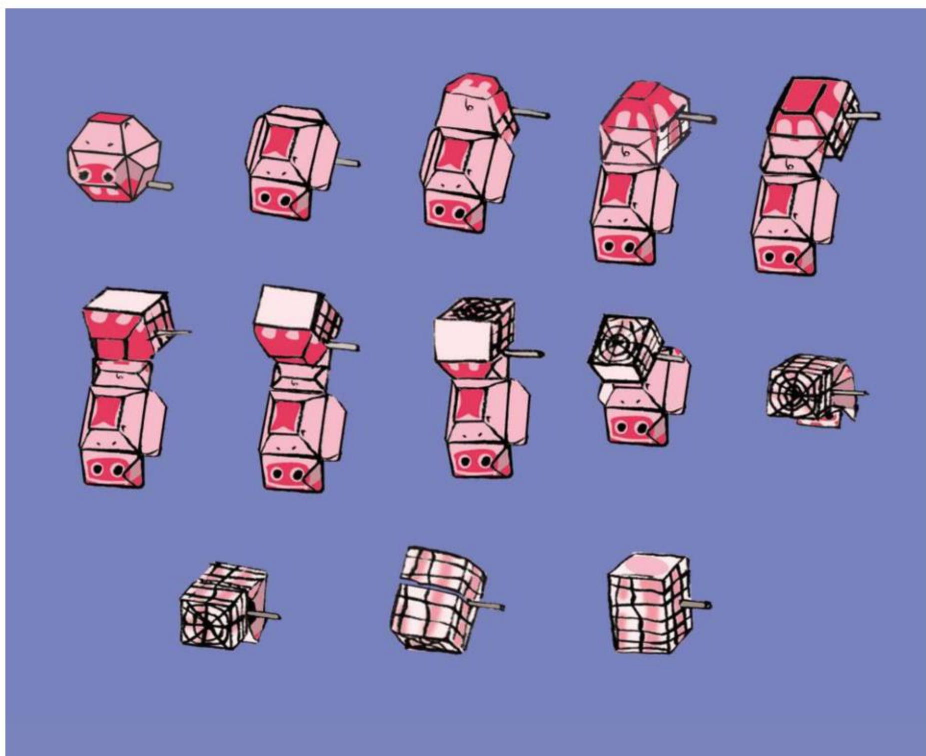
Jai quan sát mọi thứ. "Cho nên cùng một khối hình, nhưng đôi khi đổi mặt trong ra ngoài có thể tạo được hai khối hình khác nhau phải không ạ?", cậu hỏi giáo sư Yamaaki.

"Cậu bé quan sát thật tốt", giáo sư nói. "Chúng ta lật khối hình bát diện cụt ban đầu thành một khối lập phương, trong khi khối hình bát diện cụt thứ hai, với con kỳ nhông, chúng ta lật thành một khối hình bát diện cụt khác. Vâng, với một cách cắt khác, một khối hình nhất định có thể đổi ngược thành hai hoặc nhiều khối hình khác nhau".

"Tôi có làm nhiều khối hình mà có thể đổi mặt bên trong ra ngoài để tạo thành những khối hình khác. Nhiều khối trong số đó được trưng bày ở trong phòng này."

Giáo sư lấy một khối hình khác được vẽ trông giống như một con heo. Jai nhận biết được rằng đây cũng là hình bát diện cụt.

Con heo được gắn vào một cái trục. Khi giáo sư Yamaaki xoay trục, con heo bị lật từ trong ra ngoài và biến thành một tảng giăm bông! Tất cả bọn trẻ cười vang.



Giáo sư cầm lăng kính tam giác với chữ "OPEN" và đổi ngược nó bên trong ra ngoài, thành một lăng kính tam giác đồng dạng với lăng kính ban đầu, nhưng với chữ "CLOSED"[2]. Điều đó cũng có nghĩa là "bài giảng hôm nay của giáo sư đến đây là kết thúc".

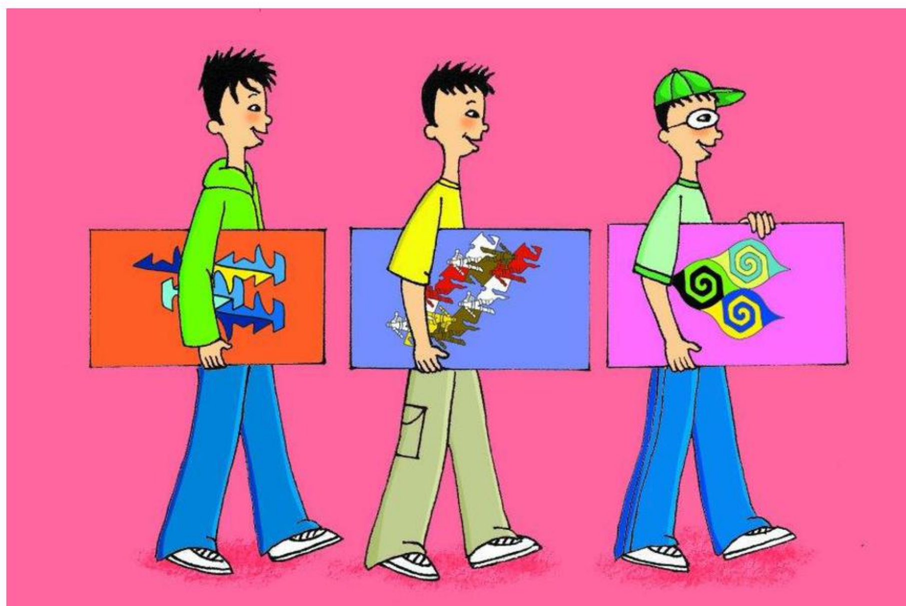




Các cậu bé đều thích thú, ngạc nhiên và háo hức. Chúng mệt nhừ sau một ngày có quá nhiều những điều mới lạ, quan sát và vận dụng trí óc liên tục. Chúng còn tham gia xếp hàng với các bạn để chờ được nhận chữ ký và chụp ảnh kỷ niệm với giáo sư Yamaaki.


CLOSED!
CLOSED!





Chương 16 Đường về nhà



Thế giới Toán học Kỳ diệu sắp đóng cửa trong ngày. Các cậu bé đã ở đó cho đến gần sát giờ đóng cửa. Chúng quay trở lại quầy để trả những đôi giày trượt. Trên tay chúng là các bài tập về nhà, tác phẩm kiểu Escher chúng tự làm, và các sản phẩm xoắn và cắt giấy.

Trên đường quay trở ra, chúng thấy một dãy các màn hình ti vi. Giáo sư Yamaaki đang ở trên đó và ông ấy đang giảng giải nhiều điều khác nhau trên mỗi màn hình.

"Ồ, đó là lý do tại sao trông ông ấy quen đến vậy", Ichiro nói, "mình đã từng nhìn thấy ông ấy trên ti vi rồi".

Chúng gặp chị Keiko lần nữa. Chị ấy cho chúng xem một quyển vở. "Đây là nơi những người đến tham quan viết cảm nhận của mình. Các em có muốn viết điều gì không?"

Ba cậu bé lần lượt ghi lại cảm xúc của mình.

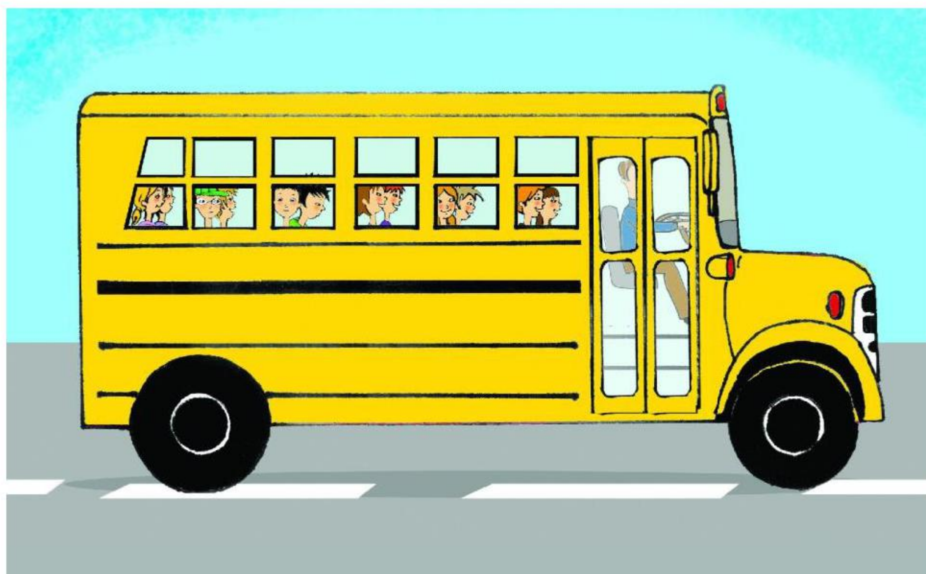
Trước đây tôi không thích toán, nhưng bây giờ thì tôi nghĩ là tôi đã thích nó rồi. Cái máy làm ra những cái lỗ hình vuông thật là tuyệt! Cả cái máy để tính ƯCLN và BCNN nữa. - Ichiro

Toán thật là vui! Tôi đã không biết điều đó cho đến khi tôi đến đây. Tôi thích trượt pa-tanh nhất. Chúng ta có thể mua đôi giày trượt ở đâu nhỉ? - Kino

Thật là ngạc nhiên và đầy thử thách! Tôi chưa bao giờ hăng hái suy nghĩ nhiều như ngày hôm nay, và tôi rất là thích thú. Tôi tự hỏi tôi sẽ trở thành nhà toán học chăng. - Jai

PS. *Hôm nay, chỉ có một ngày thì không đủ để nhìn được tất cả mọi thứ. Chúng tôi sẽ trở lại.*

Các cậu bé đã rất mệt rồi, vì thế chúng im lặng suốt cả quãng đường về nhà. Mỗi người đắm chìm trong những suy nghĩ của riêng mình.





Sau mọi việc xảy ra trong ngày, Ichiro nghĩ rằng bà của cậu đã nói đúng. Thế giới Toán học Kỳ diệu quả là có rất nhiều điều bổ ích. Toán học đã trở nên thật thú vị. Những trái tim xoắn sẽ dành cho bà và bức tranh "Escher" sẽ tặng cho mẹ. Có thể là mẹ sẽ treo bức tranh trong phòng của mẹ.

Kino nhớ lại tất cả những điều kỳ diệu mà cậu đã được trải nghiệm. Cậu sẽ cố gắng tìm ra những điều cậu có thể nói về chuyến đi này hay hơn Kentaro.

Jai nhớ lại tất cả những ghi chú của cậu và kế hoạch thử nghiệm môn toán mà cậu sẽ làm khi về nhà.



Lời cảm ơn

Giáo sư Joseph O'Rourke và giáo sư Stan Wagon đã cho chúng tôi biết về những chiếc xe đạp với bánh xe hình vuông được trưng bày trong một số viện bảo tàng khoa học ở Mỹ.

Lần đầu tiên chúng tôi được tìm hiểu về vấn đề gấp và cắt là qua bài giảng của giáo sư Erik D. Demaine, *Folding and Unfolding Linkages, Paper and Polyhedron* tại Hội nghị Nhật Bản về Toán rời rạc và Hình học máy tính năm 2000. Giáo sư Demaine đã sẵn lòng giúp đỡ và cho phép sử dụng những mô hình nếp gấp của mình vào trong những bài giảng trên ti vi của giáo sư Akiyama.

Ông Sebastian von Wathenau Mayer và bà Claudia Masferrer Leon đã sáng tạo ra cơ cấu bánh xe và trục được thấy trong những đôi giày pa-tanh trong cuốn sách này. Những bánh xe có độ rộng không đổi và những trục là tam giác Reuleaux quay trong khung hình vuông. Hai người này đều là học trò của giáo sư Urritia Jorge.

Ông Yasuyaki Yamaguchi và ông Minoru Kanzaki đã chế tạo ra hầu hết các mẫu hình có trong Thế giới Toán học Kỳ diệu. Hai ông đã mất mười năm để làm ra những tác phẩm này.

Những mẫu về hình tam giác, lỗ hổng ngũ giác được giới thiệu bởi ông Yoshiyuki Kawazoe và ông Ikuro Sato. Những dụng cụ thực tế này đã được làm bằng kim loại.

Ông I. Sato và ông H. Nakagawa đã cung cấp các khối hình lấp kín không gian mà chúng ta gọi là các c-squadron ở trong sách.

Công ty M.C Escher Company - Holland đã cho phép đăng lại những tác phẩm của Escher lên cuốn sách.

Chú thích

The Hyatt Co. đã lấy được một bằng sáng chế vào năm 1921 đối với một mũi khoan làm ra lỗ hổng hình vuông. Mũi khoan của họ có một lưỡi cố định, một khung quay và nặng 200 kg. Còn mũi khoan trong Thế giới Toán học Kỳ diệu có nhiều lưỡi quay, có một trục linh hoạt, một khung cố định và có thể di động được.

Năm 1889, Francis Galton đã thiết kế ra một dụng cụ gọi là Galton quincunx để mô tả phân bố chuẩn trong xác suất. Phần phía trên cùng của dụng cụ pachinko ở Chương 6 được thiết kế tương tự như bảng của Galton, nhưng phần đáy nôi thì được thêm vào để dễ dàng nghiêng dụng cụ khi biểu diễn, và cũng để cho các quả bóng quay trở về vị trí ban đầu.